

**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

---

**FAKULTÄT BAUINGENIEURWESEN**

---

Jan Matheas

**ENTWICKLUNG VON  
FINITEN SCHALENELEMENTEN ZUR  
BERECHNUNG VON VERSTÄRKUNGEN  
AUS TEXTILBETON  
BEI FLÄCHENTRAGWERKEN**

Schriftenreihe  
Konstruktiver Ingenieurbau Dresden  
Heft 9

## Herausgeber

Prof. Dr.-Ing. Manfred Curbach  
apl. Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Graf  
Prof. Dr.-Ing. habil. Ulrich Häußler-Combe  
Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Kaliske  
Prof. Dr.-Ing. Viktor Mechtcherine  
apl. Prof. Dr. rer. nat. habil. Michael Schiekel  
Prof. Dr.-Ing. Bernhard Weller  
Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd W. Zastrau

Technische Universität Dresden  
Fakultät Bauingenieurwesen  
D-01062 Dresden

Tel. 49 351 / 4 63-3 42 77  
Fax 49 351 / 4 63-3 72 89

Druck: addprint AG · Am Spitzberg 8a · 01728 Bannewitz

ISSN 1613-6934 | ISBN 3-86005-543-7

## Die Eiche und das Schilfrohr

Die Eiche sprach zum Schilf: „Du hast, so scheint mir, guten Grund mit der Natur zu grollen. Zaunköniglein ist dir schon eine schwere Last. Der Windhauch, der in leisem Schmollen des Baches Stirn, unmerklich fast, kräuselt, zwingt dich, den Kopf zu neigen. Indes mein Scheitel trotz der heißen Sonne Glut gleich hoher Alpen Firn. Und nicht des Sturmes Wut vermag mein stolzes Haupt zu beugen. Was dir schon rauher Nord, scheint linder Zephir mir. Ja, ständst du wenigstens gedeckt von meinem Laube in meiner Nachbarschaft, dann - glaube - gern meinen Schutz gewährt' ich dir. Du würdest nicht dem Sturm zum Raube. So aber stehst am feuchten Saum des Reichs der Winde du in preisgeb' nem Raum. Sehr ungerecht an dir hat die Natur gehandelt!“

„Dein Mitleid“, sagt das Rohr, „das plötzlich dich anwandelt, von gutem Herzen zeugt. Doch Sorge nicht um mich. Glaub, minder drohet mir als dir der Winde Toben. Ich biege', ich breche nicht. Bis heut' zwar hieltst du dich und standst, wie furchtbar sie auch schnoben, fest, ungebeugt an deinem Ort. Doch warten wir's ab!“

Kaum sprach es dieses Wort, da sieh, am Horizont in schwarzer Wolke zeigt sich und rast heran, ein Sturmes Aar, der Schrecken schrecklichster, den je der Nord gebar. Fest steht der Baum, das Schilfrohr neigt sich. Der Sturm verdoppelt seine Wut und tobt bis er entwurzelt fällt den, des stolzes Haupt dem Himmel sich gesellte und dessen Fuß ganz nah dem Reich der Toten ruht.

Jean de La Fontaine, 1621–1695

## **Vorwort des Autors**

Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser,

die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Technische Mechanik, Festigkeitslehre und Flächentragwerke des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke der Technischen Universität Dresden in den Jahren 1999 bis 2005.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Bernd W. Zastrau für die Förderung meiner wissenschaftlichen Entwicklung, die Betreuung dieser Doktorarbeit und die Übernahme des Hauptreferates.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Kaliske und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Hufenbach für die Übernahme der Koreferate.

Ich danke der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung der Forschung im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 528 „Textile Bewehrungen zur bautechnischen Verstärkung und Instandsetzung“ an der Technischen Universität Dresden sowie den Kollegen im Sonderforschungsbereich für die gute Zusammenarbeit und die Bereitstellung experimenteller Daten.

Bedanken möchte ich mich auch bei allen derzeitigen und ehemaligen Mitarbeitern und Mitgliedern des Lehrstuhls für Technische Mechanik, Festigkeitslehre und Flächentragwerke und den Diplomanden und wissenschaftlichen Hilfskräften für die freundschaftliche Zusammenarbeit und das angenehme Arbeitsklima.

Dresden, im Oktober 2005

Jan Matheas

# **Entwicklung von Finiten Schalenelementen zur Berechnung von Verstärkungen aus Textilbeton bei Flächentragwerken**

Von der Fakultät Bauingenieurwesen  
der Technischen Universität Dresden  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.) genehmigte  
Dissertation

von

**JAN MATHEAS**

aus Dresden

Hauptgutachter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd W. Zastra
Mitgutachter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Kaliske
Mitgutachter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Hufenbach
Tag der mündlichen Prüfung:	31. Januar 2006

## **Kurzfassung:**

In der vorliegenden Dissertation wird auf der Grundlage einer kontinuumsmechanischen Herangehensweise die Formulierung eines mechanischen Modells in Verbindung mit der Umsetzung in ein Schalelement im Rahmen der Finite-Element-Methode zur Simulation des Tragverhaltens geschichteter Flächentragwerksstrukturen unter Berücksichtigung der Schädigungsart Delamination vorgestellt. Grundlage des Mehrschichten-Modells ist die Entwicklung einer geometrisch nichtlinearen oberflächenorientierten Schalentheorie mit schub- und dickenelastischem Verhalten ausgehend von der vollständigen Kinematik einer Multidirektor-Theorie. Der Oberflächenbezug gewährleistet eine auf Kontaktprobleme angepasste mechanische Modellbildung. Innerhalb der Schichten wurde ein Materialgesetz für linear elastisches, orthotropes Material verwendet, dessen Dreidimensionalität durch die Schalenformulierung nicht eingeschränkt wird. Das Hauptaugenmerk der Arbeit liegt auf der Entwicklung eines auf verschiedene Materialien anpassbaren Schichten-Verbundmodells. Das Versagen des Schichtenverbundes – Delamination genannt – wurde durch ein einfaches Spannungskriterium beschrieben. Die Delamination wird durch Modifikation der kinematischen Bedingungen diskret berücksichtigt. Zur Beschreibung des Tragverhaltens nach Ausbildung der Delamination wurde ein als „innerer Kontakt“ bezeichnetes Kontakt-Modell entwickelt, durch das Adhäsion zwischen den Schichten berücksichtigt werden kann. Das vorliegende Schalenmodell kann bei Berücksichtigung von Delamination auf Probleme, in denen kleine Relativverschiebungen zu erwarten sind, für beliebige elastische Materialien angewendet werden. Der Rahmen, in dem diese Arbeit entstand, gab den hauptsächlichen Einsatzbereich, die Simulation von Flächentragwerksstrukturen mit einer Verstärkungsschicht aus textilbewehrtem Feinbeton, vor.

**Schlüsselworte:** Kontinuumsmechanik, Materialtheorie, Kontaktformulierung, oberflächenorientierte Schalentheorie, Methode der finiten Elemente, Verbundverhalten, Delamination

## **Abstract:**

This publication introduces, in a continuum-mechanical approach, the formulation of a mechanical model in connection with the transformation into a shell element using the finite element method for the simulation of the load-bearing behaviour of laminated shell structures thereby considering delamination as a type of damage. This multi-layer model is based upon the development of a geometrically nonlinear surface-related shell theory with shear-elastic behaviour and variable thickness, beginning with the complete kinematics of a multi-director theory. The surface relationship ensures a mechanical modelling which is adaptable for contact problems. A linear-elastic orthotropic material law, whose three-dimensionality is not restricted by the shell formulation, applies within the layers. The main focus of the thesis is on the development of a layer-bond model that can be adjusted for different materials. The debonding of layers – called delamination – is described by a simple stress criterion. Delamination is discretely taken into account by modifying the kinematic conditions. A contact model, called „inner contact“, that can be used to account for adhesion between layers, has been developed to describe the load-bearing behaviour after delamination has occurred. The present shell model is restricted to elastic material behaviour and can preferably be applied to such problems where small relative displacements are expected. The environment, in which this research has been conducted, established the primary of application area, which is the simulation of shell structures within a strengthening layer comprised of textile-reinforced concrete.

**Keywords:** continuum mechanics, material theory, contact formulation, surface-related shell theory, finite element method, bond behaviour, delamination

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Ziele der Arbeit . . . . .	1
1.2	Kontinuumsmechanische Grundlagen . . . . .	2
1.2.1	Kontinuum . . . . .	2
1.2.2	Kinematische Gleichungen . . . . .	2
1.2.3	Bilanzgleichungen . . . . .	2
1.2.4	Konstitutive Beziehungen . . . . .	3
1.3	Grundlagen der mechanischen Modellbildung . . . . .	3
1.3.1	Schalentheorien . . . . .	3
1.3.2	Oberflächenorientierte Schalentheorien . . . . .	5
1.3.3	Mehrschichten-Schalentheorien . . . . .	5
1.3.4	Faserverbundwerkstoffe . . . . .	5
1.3.5	Delamination . . . . .	6
1.3.6	Kontaktmechanik . . . . .	8
1.4	Modellbildung in der Arbeit . . . . .	8
1.5	Schreibweise . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Einschichten-Schalentheorie</b>	<b>14</b>
2.1	Allgemeines . . . . .	14
2.2	Geometrie . . . . .	14
2.2.1	Schalenkörper und Schalenreferenzfläche . . . . .	14
2.2.2	Basissystem der Schalenreferenzfläche . . . . .	16
2.2.3	Direktoren . . . . .	17
2.2.4	Basissystem des Schalenkörpers . . . . .	18
2.2.5	Schalentensor . . . . .	19
2.3	Einschichtenkinematik . . . . .	20
2.3.1	Verformter Schalenkörper . . . . .	20
2.3.2	Basissysteme der verformten Schale . . . . .	20
2.3.3	Kinematische Variablen . . . . .	21
2.3.4	Deformationsgradient . . . . .	23
2.4	Verzerrungsmaße . . . . .	24
2.4.1	Verzerrungstensor . . . . .	24
2.4.2	Verzerrungstensor der Oberfläche . . . . .	26
2.5	Spannungen . . . . .	27
2.5.1	Spannungstensoren . . . . .	27
2.5.2	Spannungstensor der Oberfläche . . . . .	29
2.5.3	Orthonormale Basissysteme . . . . .	29
2.5.4	Physikalische Spannungsmaße . . . . .	31

2.5.5	Vergleich der Spannungsmaße am Beispiel . . . . .	33
2.6	Materialgesetz . . . . .	38
2.6.1	Anforderungen an Stoffgesetze . . . . .	38
2.6.2	Textilbewehrte Verstärkungen . . . . .	38
2.6.3	Materialgesetz – lineares orthotropes Material . . . . .	39
2.7	Prinzip der virtuellen Verschiebungen . . . . .	42
2.8	Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte . . . . .	43
2.8.1	Direktorkräfte . . . . .	43
2.8.2	Lasttypen – Häufig auftretende Belastungsfunktionen . . . . .	45
2.8.3	Lasttypen – Vorgabe von Elementen des Spaltenvektors der Direktorkräfte . . . . .	48
2.9	Methode der finiten Elemente . . . . .	53
2.9.1	Linearisierung . . . . .	53
2.9.2	Diskretisierung . . . . .	54
2.9.3	Tangentiale Steifigkeitsmatrix und Vektor der inneren Kräfte . . . . .	62
2.9.4	Verknüpfung des Schalenelementes mit Kontaktelementen . . . . .	64
2.10	Geschlossener Ring unter gleichmäßiger Normalbelastung – Numerisches Beispiel . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Mehrschichten-Schalentheorie</b>	<b>67</b>
3.1	Modellbildung . . . . .	67
3.2	Analogie zur Einschichtentheorie . . . . .	71
3.2.1	Geometrie eines differentiellen Mehrschichten-Elementes . . . . .	71
3.2.2	Schalenkinematik einer Schicht . . . . .	74
3.2.3	Verzerrungstensoren einer Schicht . . . . .	75
3.2.4	Spannungs- und Elastizitätstensor einer Schicht . . . . .	77
3.2.5	Äußere Lasten und Direktorkräfte . . . . .	78
3.2.6	Diskretisierung aller Größen einer Schicht . . . . .	79
3.2.7	Tangentiale Steifigkeitsmatrix und Vektor der inneren Kräfte eines finiten Mehrschichten-Elementes . . . . .	81
3.3	Vollständiger Verbund in der verformten Konfiguration . . . . .	82
3.3.1	Mehrschichten-Schalenkinematik in Bereichen mit Schichtenverbund . . . . .	82
3.3.2	Verschiebungsfreiwerte des finiten Mehrschichten-Elementes bei vollem Verbund . . . . .	83
3.3.3	Verbundmatrix bei vollem Verbund . . . . .	85
3.3.4	Elementmatrizen und -spaltenvektoren des finiten Mehrschichten-Elementes bei vollem Verbund . . . . .	86
3.4	Randbedingungen . . . . .	87
3.4.1	Randbedingungsmatrix . . . . .	87
3.4.2	Gelenkig feste und gelenkig querverschiebliche Lagerung – bleibender Verbund im Lagerbereich . . . . .	88
3.4.3	Gelenkig feste und gelenkig querverschiebliche Lagerung – fehlender Verbund im Lagerbereich . . . . .	91
3.5	Numerische Beispiele . . . . .	92
3.5.1	Kragbalken – Versteifungseffekte . . . . .	92
3.5.2	Kreisbogenträger – Dreidimensionale Spannungszustände . . . . .	96

<b>4</b>	<b>Erweiterungen zur Mehrschichten-Schalentheorie</b>	<b>99</b>
4.1	Modellbildung . . . . .	99
4.2	Unstetige Mehrschichten-Schalenkinematik . . . . .	101
4.2.1	Mehrschichten-Schalenkinematik in Bereichen ohne Schichtenverbund . . .	101
4.2.2	Mehrschichten-Schalenkinematik in Bereichen mit Schichtenverbund . . .	102
4.2.3	Modellanpassung des finiten Mehrschichten-Elementes . . . . .	102
4.2.4	Verbundmatrix der allgemeinen Mehrschichten-Schalenkinematik . . . . .	104
4.2.5	Elementmatrizen und -spaltenvektoren der allgemeinen Mehrschichten-- Schalenkinematik . . . . .	105
4.3	Delaminationskriterium . . . . .	106
4.4	Innerer Kontakt . . . . .	109
4.4.1	Grundlagen zum Kontakt . . . . .	110
4.4.2	Kontakt zwischen Schichten – Normalkontakt . . . . .	113
4.4.3	Tangentialkontakt . . . . .	117
<b>5</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>125</b>
5.1	Kragplatte – Einfluss der Reibgesetze . . . . .	125
5.2	Laschenabzugsversuch – Parameterskalierung . . . . .	129
5.3	Platte mit kreisförmiger Anfangsdelamination – Delaminationsfortschritt . . . . .	132
5.3.1	Platte aus kohlefaserverstärktem Kunststoff . . . . .	132
5.3.2	Platte aus Beton und einer Verstärkungsschicht aus Textilbeton . . . . .	134
5.4	Kuppel des Krümmeler Wasserturms – Anwendung . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>141</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	141
6.2	Ausblick . . . . .	142
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>145</b>



## Abbildungsverzeichnis

1.1	Delamination an textilbetonverstärkten Plattenbalken . . . . .	1
2.1	Kuppelschale . . . . .	14
2.2	Differentialgeometrie des unverformten Schalenkörpers . . . . .	15
2.3	Referenzkonfiguration und verformte Konfiguration eines Teils des Schalenkörpers mit der Oberfläche als Referenzfläche . . . . .	20
2.4	Multidirektor-Kinematiken – mögliche Verformung des Schalenkörpers bei unterschiedlichen Kinematiken . . . . .	22
2.5	Kinematik mit Direktoren der Schale, dargestellt für $\Theta^3 = 1$ . . . . .	23
2.6	Definition eines normierten kartesischen Koordinatensystems . . . . .	30
2.7	Darstellung der Schnittkräfte $df_B$ und $dF_B$ in unterschiedlichen Konfigurationen . . . . .	33
2.8	Applikation und textile Bewehrungsstrukturen . . . . .	39
2.9	Symmetrieeigenschaften des Materials als Folge verschiedener Anordnungen von textilen Gelegen . . . . .	40
2.10	Definition des lokalen Materialkoordinatensystems . . . . .	41
2.11	Beispiel für ein Lastvektorfeld $\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = F_a^3(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{e}_3$ und eine Oberflächenlast ${}_0\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2) = {}_0F_a^3(\Theta^1, \Theta^2) \mathbf{e}_3$ . . . . .	43
2.12	Lastverteilungen über die Schalendicke im Punkt ${}_0P$ der Schalenreferenzfläche . . . . .	46
2.13	Approximation von Volumenlasten (Lastverteilungsfunktionen entlang der Schalendicke): Lastvektorfelder bei eingetragenen zur Verschiebung einzelner Direktoren konjugierten Kräfte bei insg. a) 1 Direktor; b) 2 Direktoren; c) 3 Direktoren . . . . .	50
2.14	Lastvektorfeld für ausgewählte Lastkonstellation bei insg. 3 Direktoren . . . . .	51
2.15	Lastvektorfeld bei Superposition aller zur Verschiebung einzelner Direktoren konjugierten Kräfte bei insg. 3 Direktoren . . . . .	52
2.16	Geometrie des finiten Elementes . . . . .	54
2.17	Geschlossener Ring unter gleichmäßig verteilter Normalbelastung . . . . .	66
2.18	Geschlossener Ring unter gleichmäßig verteilter Normalbelastung - Spannungen . . . . .	67
3.1	Möglichkeit einer Schichtung der Schale und Schichtenreferenzflächen (Interfaces) . . . . .	68
3.2	Schubspannungen durch unterschiedliche Querkontraktionen aneinander grenzender Schichten unterschiedlichen Materials bei Längsdehnung . . . . .	68
3.3	Delamination; links: an einem textilbewehrten Stahlbeton-Plattenbalken, rechts: an einer textilbewehrten Holz-Leiste . . . . .	70
3.4	Mehrschichten-Schalenkinematik mit nur teilweiser $C^0$ -Stetigkeit . . . . .	71
3.5	Differentialgeometrie des unverformten Mehrschichten-Schalenkörpers $\mathcal{B}$ . . . . .	72
3.6	Mehrschichten-Schalenkinematik . . . . .	75
3.7	Spannungsvektor der Oberfläche . . . . .	78
3.8	Mehrschichten-Schalenkinematik . . . . .	83
3.9	Mehrschichten-Multidirektor-Kinematiken – mögliche Verformung des Schalenkörpers bei unterschiedlichen Kinematiken (unterschiedliche Anzahl von Direktoren) . . . . .	84
3.10	Drehgelenk in der Mitte des Schalenkörpers . . . . .	88
3.11	Kragbalken ( $l = 10 \text{ cm}$ , $h = 1 \text{ cm}$ , $b = 1 \text{ cm}$ , $p = 100 \text{ N/cm}$ ) . . . . .	93

3.12	Kragbalken gleichen Materials und gleicher Elementierung . . . . .	94
3.13	Abweichungen der Durchbiegung am Kragbalkenende in Abhängigkeit der Schichtenanzahl und der Anzahl der Direktoren bzgl. $w_{\text{dick}}$ bzw. $w_{\text{dünn}}$ ; Klammerwerte: Freiheitsgrade je FE-Knoten . . . . .	94
3.14	Hauptspannungen (Richtungen entsprechend den punktwise eingetragenen kurzen schwarzen Linien) aus dem Piola-Kirchhoff- und dem Cauchy-Spannungstensor in $N/cm^2$ an einem Vertikalschnitt durch den Balken . . . . .	96
3.15	Reine Biegung des Kreisbogenträgers . . . . .	97
3.16	Reine Biegung des Kreisbogenträgers - Spannungen . . . . .	99
4.1	Seitenansicht des Laschenabzugsversuches (Prinzipskizze) . . . . .	100
4.2	Seitenansicht der Textilbetonverstärkungsschicht (Lasche) mit Delamination und Rissbild . . . . .	100
4.3	Bereiche ${}^e S_L$ einer Schichtenreferenzfläche des finiten Elementes . . . . .	103
4.4	Unstetige Mehrschichten-Multidirektor-Kinematiken – mögliche Verformung des Schalenkörpers bei unterschiedlichen Kinematiken (unterschiedliche Anzahl von Direktoren) . . . . .	104
4.5	Versagensfläche $V(\sigma_{mL}^{13}, \sigma_{mL}^{23}, \sigma_{mL}^{33}) = 0$ . . . . .	109
4.6	Konfiguration zweier Kontaktpartner . . . . .	110
4.7	Zulässige Tangentialspannungen unmittelbar nach dem Bruch . . . . .	119
4.8	Mechanische Modelle für die Grenzwerte des Parameters $\mu_0$ . . . . .	119
4.9	Verformungszustände nach dem Bruch (oben) mit Freikörperbildern und exemplarischen Schubspannungszuständen (unten) . . . . .	121
4.10	Gleitprozess zweier Schichten; links: Betone; rechts: Kunststoffe . . . . .	122
4.11	Bereich zulässiger Spannungszustände während des Gleitens . . . . .	123
4.12	Abnahme der übertragbaren Tangentialkontaktspannung mit zunehmender max. Tangentialverschiebung . . . . .	123
5.1	Verstärkte Kragplatte mit Flächenlast $48 kN/m^2$ . . . . .	125
5.2	Berechnungen mit verschiedenen Reibgesetzen . . . . .	126
5.3	Verformungen bei schwacher Reibung, max. Durchbiegung $6,639 cm$ . . . . .	127
5.4	Verformungen bei schlupfabhängiger Reibung, max. Durchbiegung $5,810 cm$ . . . . .	127
5.5	Verformungen bei starker Reibung, max. Durchbiegung $5,368 cm$ . . . . .	128
5.6	Versuchsanordnung des Laschenabzugsversuchs aus SFB 528, Teilprojekt C1 . . . . .	129
5.7	Elementierung (Längsschnitt im FE-diskretisierten Ausschnitt) . . . . .	129
5.8	FE-Simulation des Laschenabzugsversuchs . . . . .	130
5.9	FE-Simulation des Laschenabzugsversuchs (Berührungsfläche von Lasche und Grundkörper im FE-diskretisierten Ausschnitt bei $F = 23,2 kN$ ) . . . . .	131
5.10	Normalspannungen $\sigma_{mL}^{11}$ in $kN/m^2$ (in Kraftwirkungsrichtung bei $F = 23,2 kN$ ) im Längsschnitt; Vergleich von mit IDEAS und DREFES erzeugten Ausschnitten . . . . .	132
5.11	Platte mit kreisförmiger Anfangsdelamination: statisches System und Vernetzung, Maße in $mm$ . . . . .	133
5.12	Vergrößerung des delaminierten Bereiches der Platte aus kohlefaserverstärktem Kunststoff bei zunehmender Drucklast . . . . .	134

5.13	Links: Vergrößerung des delaminierten Bereiches der Platte aus Textilbeton bei zunehmender Längsbeanspruchung und Biegung; rechts: Platte mit kreisförmiger Anfangsdelamination, statisches System, Maße in <i>cm</i> . . . . .	135
5.14	Krümmeler Wasserturm . . . . .	136
5.15	Abmessungen des Krümmeler Wasserturms . . . . .	136
5.16	Querschnitt des diskretisierten Bereichs der Kuppelschale . . . . .	137
5.17	Kuppelschale des Krümmeler Wasserturms . . . . .	138
5.18	Delaminationsfortschritt bei halbseitiger Flächenlast . . . . .	139
5.19	Bereiche mit senkrecht auf die Schalenfläche wirkendem Druck und Sog . . . . .	140
5.20	Delaminationsfortschritt bei bereichsweise senkrecht auf die Schalenfläche wirkendem Druck und Sog . . . . .	140



# 1 Einleitung

## 1.1 Ziele der Arbeit

Die vorgelegte Dissertation steht in engem Zusammenhang mit der Forschung im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 528 „Textile Bewehrungen zur bautechnischen Verstärkung und Instandsetzung“ an der Technischen Universität Dresden im Teilprojekt C2 „Entwicklung oberflächenorientierter Schalentheorien und entsprechender FE-Modelle“, vgl. dazu die Beiträge in den Kolloquiumsbänden [ MATHEAS et al. 2001] und [ ZASTRAU et al. 2003]. Ein wesentliches Ziel der Forschungstätigkeit dieses Sonderforschungsbereiches ist die analytische und numerische Erfassung des Tragverhaltens von flächigen Verstärkungen aus Feinbeton, die durch Kohle- bzw. Glasfasergelege bewehrt sind. Im Rahmen dieser Arbeit werden die theoretisch-numerischen Aspekte

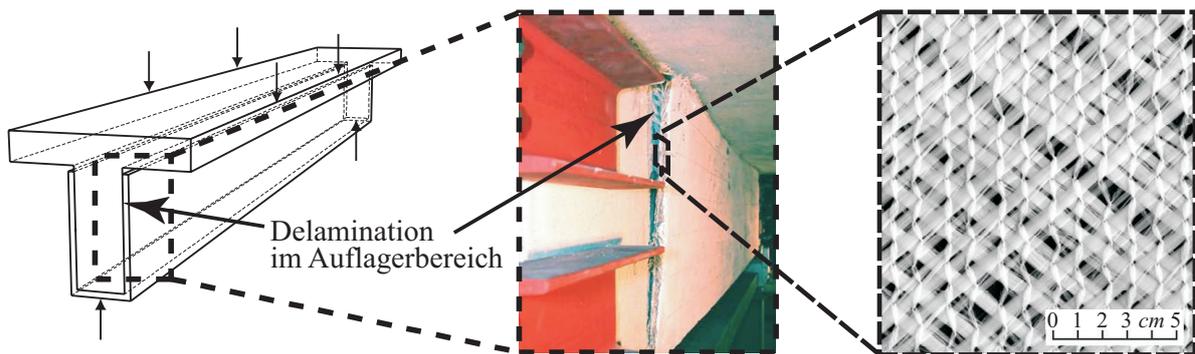


Abbildung 1.1: Delamination an textilbetonverstärkten Plattenbalken

der Herleitung entsprechender oberflächenorientierter Schalentheorien und ihrer Umsetzung in ein leistungsstarkes Finite-Element-Programmpaket behandelt. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine mechanische und numerische Berechnungsgrundlage zu schaffen, die es insbesondere erlaubt, physikalische Eigenschaften in Flächen zu berücksichtigen, in denen gleiche oder unterschiedliche Materialien gefügt sind. Die hier aus den oberflächenorientierten Schalentheorien entwickelten Finite-Element-Modelle beziehen sich mit Rücksicht auf die Einbindung im Sonderforschungsbereich vordringlich auf Flächentragwerke aus Textilbeton, obwohl die methodischen Zugänge werkstoffneutral sind. Hinsichtlich des in dieser Arbeit eingeführten Materialgesetzes soll jedoch nur eine sehr einfache Näherung für das tatsächliche Materialverhalten von textilbewehrten Materialien verwendet werden, da im Rahmen der Arbeit neben der Entwicklung des Schalenmodells schwerpunktmäßig ein spezieller Versagensmechanismus, und zwar die Delamination, untersucht werden soll.

Anwendungsorientiertes Ziel dieses Forschungsprojektes ist es u. a., den Beanspruchungs- und Schädigungszustand in der Verstärkungsschicht zu bestimmen. Mit den in dieser Arbeit zu entwickelnden Schalenmodellen sollen die Ermittlung von Kontaktspannungszustand und Bruchverhalten in Form von Delamination, zum Einen zwischen Grundmaterial und Verstärkung und zum Anderen in Flächen zwischen einzelnen Lagen innerhalb der Verstärkung ermöglicht werden. Ein solcher durch Delamination verursachter Schaden an textilbetonverstärkten Plattenbalken bei Versuchen des Teilprojektes D1 des Sonderforschungsbereiches 528 ist in Abb. 1.1 dargestellt. Im Zusammenhang mit der Untersuchung des Bruchverhaltens sollen durch das Modell in Schalendickenrichtung verteilte Lasten bzw. Spannungskonzentrationen im Grundmaterial berücksichtigt werden können. Zudem sollen finite Elemente, die auf die Simulation der Entstehung von Delamination und das Tragverhalten nach erfolgter Delamination ausgerichtet sind, zur Verfügung gestellt werden.

## 1.2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

### 1.2.1 Kontinuum

Die Kontinuumsmechanik umfasst die Untersuchung des Verhaltens von Körpern unter äußeren Einwirkungen, z. B. durch Kräfte und Momente, Randverschiebungen oder Erwärmung. Sie bildet in diesem Zusammenhang den theoretischen Rahmen für Festkörper, Flüssigkeiten oder Gase. Im kontinuumsmechanischen Modell wird der atomare oder mikrostrukturelle Aufbau der Körper vernachlässigt. Der Körper wird als zusammenhängende Menge von materiellen Punkten betrachtet, das sogenannte Kontinuum. Den materiellen Punkten im Kontinuum sind physikalische Größen, z. B. Verschiebungen, Spannungen, Temperatur, zugeordnet, die als Felder bezeichnet werden. Zur Berechnung der Bewegung eines Körpers bei vorgegebenen Randbedingungen sind Beziehungen zwischen den Feldern zu formulieren, die sogenannten Feldgleichungen, die zusammen im Allgemeinen ein System gekoppelter nichtlinearer partieller Differentialgleichungen darstellen, dessen Lösung bevorzugt numerisch angestrebt wird. Um eine Lösung des Gleichungssystems erhalten zu können, muss die Anzahl unabhängiger Gleichungen so groß wie die Anzahl der unbekannt GröÙen sein. Die Feldgleichungen lassen sich in drei Gruppen einordnen: Kinematische Gleichungen, Bilanzgleichungen und konstitutive Beziehungen.

### 1.2.2 Kinematische Gleichungen

Die kinematischen Gleichungen sind stoffunabhängig. Sie können z. B. auf der Grundlage von Verschiebungs-, Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsfeldern, Verzerrungsfeldern oder Deformationsgeschwindigkeitsfeldern formuliert werden. Die durch diese Gleichungen beschriebenen Beziehungen innerhalb des Kontinuums liefern die Grundlage für die Formulierung unterschiedlicher sogenannter Tragwerkstheorien, darunter Flächentragwerkstheorien, wie Scheiben-, Platten- und Schalentheorien.

### 1.2.3 Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen der Mechanik stellen Grundgesetze der Kontinuumsmechanik dar und bilden damit die Grundlage zur Beschreibung mechanischer Problemstellungen. Sie bilden gemeinsam mit der Entropieproduktionsungleichung den notwendigen Rahmen für die Beschreibung des Deformationsverhaltens eines materiellen Körpers. Sie sind unabhängig vom gewählten Materialmodell. Aus den Bilanzgleichungen für jedes Teilvolumen lassen sich Gleichungen für jeden materiellen Punkt aufstellen. Erhaltungssätze werden für einen materiellen Körper in der Momentankonfiguration aufgestellt.

Die prinzipielle Struktur der Bilanzgleichungen ist derart, dass die zeitliche Änderung einer extensiven physikalischen Größe der Zufuhr durch die Oberfläche, der Zufuhr im Inneren des Betrachteten Volumens und der Produktion im Inneren dieses Volumens gleichgesetzt wird. Handelt es sich um eine Erhaltungsgröße, verschwindet der Produktionsterm, und die Gleichung geht in einen Erhaltungssatz über.

#### **Massenerhaltungssatz.**

Die Masse eines materiellen Körpers ändert sich zeitlich nicht.

#### **Impulsbilanz.**

Das NEWTONsche Axiom lautet: „Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in der Richtung derjenigen Geraden, in

der diese Kraft wirkt.“ Der Begriff der Bewegungsgröße war bei NEWTON das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Daraus kann für den Fall, dass die resultierende Kraft verschwindet, der Impulserhaltungssatz formuliert werden: Die Summe aller für einen materiellen Körper vorhandenen Impulse ändert sich zeitlich nicht.

#### **Drehimpulsbilanz.**

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses eines materiellen Körpers ist gleich der Summe aller am materiellen Körper angreifenden Momente. Daraus kann für den Fall, dass das resultierende Moment verschwindet, der Drehimpulserhaltungssatz formuliert werden: Die Summe aller für einen materiellen Körper vorhandenen Drehimpulse ändert sich zeitlich nicht.

#### **Energieerhaltungssatz.**

Der Energieerhaltungssatz wird auch der „Erste Hauptsatz der Thermodynamik“ genannt. Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie eines materiellen Körpers, die sich aus der inneren Energie und der kinetischen Energie zusammensetzt, ist gleich der Summe der mechanischen Leistung der äußeren Lasten und der äußeren thermischen Leistung. Im Begriff der äußeren Lasten sind sowohl Kräfte und Momente, die auf die Oberfläche als auch auf das Volumen des materiellen Körpers wirken, enthalten.

#### **Entropiebilanz.**

Im Zusammenhang mit der Entropie kann im Allgemeinen kein Erhaltungssatz entwickelt werden. Vielmehr handelt es sich um eine Ungleichung, welche die Richtung des Prozesses thermomechanischer Vorgänge vorgibt. Die Entropieproduktionsungleichung wird auch der „Zweite Hauptsatz der Thermodynamik“ genannt. Anschaulich beinhaltet sie zwei physikalische Erkenntnisse, die auf Arbeiten von CLAUSIUS und DUHEM zurückgehen und vom Ersten Hauptsatz der Thermodynamik nicht berücksichtigt werden: Wärme fließt stets von einem Reservoir mit höherem Temperaturniveau in Richtung eines Reservoirs mit niedrigerem Temperaturniveau, und mechanische Arbeit kann in Wärme verwandelt werden, die so erzeugte Wärmemenge kann jedoch nicht vollständig in mechanische Arbeit zurückverwandelt werden. Die Entropie charakterisiert das in einem System verbleibende Arbeitsvermögen. Die zeitliche Änderung der Entropie eines materiellen Körpers ist gleich der Zufuhr und der Produktion von Entropie in den bzw. im materiellen Körper.

### **1.2.4 Konstitutive Beziehungen**

Die konstitutiven Beziehungen berücksichtigen das unterschiedliche Verhalten verschiedener Materialien unter gleichen Beanspruchungen. Die Beschreibung des Materialverhaltens erfolgt in dieser Arbeit rein phänomenologisch. Zur Aufstellung von Stoffgesetzen sind in den letzten Jahrzehnten Prinzipien herausgearbeitet worden, die überwiegend axiomatischen Charakter besitzen, vgl. [ERINGEN 1980]. Diese werden in Abschnitt 2.6.1 genannt.

## **1.3 Grundlagen der mechanischen Modellbildung**

### **1.3.1 Schalentheorien**

Ziel von Schalentheorien ist es, das Tragverhalten von Körpern, deren Dicke klein gegenüber ihren übrigen Abmaßen ist, unter Belastung durch Größen zu beschreiben, die alle auf eine sogenannte Schalenreferenzfläche bezogen sind. Diese Größen betreffen insbesondere die Verschiebungen des

Schalentkontinuums, die als Last einzuleitenden Kräfte und die Randbedingungen. In klassischen Schalentheorien werden dazu meist Hypothesen hinsichtlich der Kinematik und ggf. des Materialgesetzes getroffen, wobei u. a. insbesondere die Dickenänderung der Schale meist eliminiert wird. Die Herleitung von Flächentragwerkstheorien hat mit der Verwendung der Tensorrechnung eine neue Qualität erreicht. Als Standardwerk zu klassischen Schalentheorien sei in diesem Zusammenhang [BAŞAR, KRÄTZIG 1985] genannt. Für die Herleitung von Schalentheorien sind aus der Literatur zwei wesentliche Wege bekannt:

Die Brüder COSSERAT schlugen vor, für Flächentragwerke die Gleichgewichtsbedingungen mit Hilfe von Schnittgrößen unabhängig von der dreidimensionalen Theorie in einem zweidimensionalen Modell zu formulieren. Dieses mechanische Modell wird bei seiner rechnerischen oder numerischen Umsetzung nicht durch weitere die Zweidimensionalität betreffende Vereinfachungen verändert. Die Frage nach geeigneten Stoffgesetzen ist jedoch für solche Schalentheorien, die unter anderem von REISSNER und GREEN für lineare, sowie in [RAMM et al. 1995] für geometrisch nichtlineare Probleme vorgestellt wurden, nicht einfach zu beantworten, da die konstitutiven Beziehungen auf der Grundlage von Schnittgrößen formuliert werden müssen. Man spricht in diesem Zusammenhang von Schalentheorien ausgehend von einer COSSERAT-Fläche.

Die zweite Möglichkeit ist die Herleitung aus der Annahme eines sogenannten BOLTZMANN-Kontinuums. In den daraus hervorgehenden Schalentheorien können dreidimensionale Materialgesetze unverändert eingesetzt werden. Umfassende Herleitungen von Schalenmodellen unterschiedlicher Ordnung hinsichtlich der Kinematik aus den Gleichungen der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik auf der Grundlage der Thermodynamik liefern u. a. die Arbeiten [NAGHDI 1963] und [KRÄTZIG 1993]. Die Position eines Punktes im Schalenraum wird im Allgemeinen durch eine vektorwertige Funktion, den sogenannten Direktor, angegeben. Für die Erfassung der Verwölbung und höherer Querschnittsdeformationen werden weitere Direktoren eingeführt, die durch Reihenentwicklung der Verschiebungen in Dickenrichtung der Schale kinematisch verknüpft werden, was zu sogenannten Multidirektor-Modellen führt. Diese stellen bei Verwendung unendlich vieler Terme einer polynomialen Entwicklung in Dickenrichtung vollständige dreidimensionale Modelle dar. Die Umsetzung in die Berechnung mittels der Finite-Element-Methode kann durch die Verwendung eines Arbeitsausdruckes wie dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen erfolgen, aus dem z. B. reine Verschiebungselemente hervorgehen, vgl. [ZIENKIEWICZ 1983], [BATHE 1990]. Bei Verwendung einer reduzierten Anzahl von Termen treten in Schalenmodellen sogenannte „locking“-Effekte (Versteifungseffekte) unterschiedlicher Arten auf, die in zahlreichen Veröffentlichungen beschrieben und zusammengefasst werden, von denen hier stellvertretend nur [ECKSTEIN 1999] genannt wird. Die numerische Berechnung im Rahmen der Finite-Element-Methode mit Anwendung von Enhanced-Assumed-Strain-Konzepten (EAS) zur Vermeidung der „locking“-Effekte basiert im Allgemeinen auf der Formulierung von Mehrfeld-Funktionalen, wie dem HU-WASHIZU-Funktional, einer Mehrfeld-Darstellung durch Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen. Dieser Weg führt zu sehr allgemeinen gemischten Finite-Element-Formulierungen. Hierauf fußen effiziente Methoden wie z. B. die Enhanced-Formulierungen oder hybride Finite-Element-Formulierungen, vgl. [SIMO, RIFAI 1990].

Die Verwendung einer Schalentheorie höherer Ordnung hinsichtlich der Kinematik führt nicht zwangsläufig zu einer Steigerung der Effizienz, wenn man die anschließende numerische Realisierung durch finite Elemente mit einbezieht. Diese Modelle sind aber dennoch sinnvoll, wenn spezielle Phänomene erst dadurch berücksichtigt werden können, zum Beispiel innerhalb der Schichten bei geschichteten Schalen. Zudem verschwinden mit zunehmender Anzahl der mitgeführten Terme die „locking“-Effekte.

### 1.3.2 Oberflächenorientierte Schalentheorien

In fast allen Schalentheorien befindet sich die Referenzfläche – in Dickenrichtung des Schalenkörpers betrachtet – in der Mitte. Eine Verlegung der Referenzfläche auf die Ober- oder Unterseite des Schalenkörpers liefert sogenannte oberflächenorientierte Schalentheorien. Diese sind von Vorteil, wenn sich die für das Verhalten des Schalenkontinuums innerhalb des Schalenkörpers maßgebenden Beanspruchungen und Spannungszustände insbesondere in Schalendickenrichtung auf eine oder beide der Außenflächen konzentrieren bzw. wenn Spannungszustände insbesondere in Schalendickenrichtung in einer der Außenflächen genau erfasst werden müssen, was z. B. im Zusammenhang mit mechanischen Kontaktproblemen der Fall ist. Es gibt nur wenige Veröffentlichungen zum Thema oberflächenorientierte Schalentheorien, zu denen die Arbeiten [NAGHDI 1963], [ROTHERT, ZASTRAU 1981], [MATHEAS 1998], [ZASTRAU et al. 2000], [MATHEAS et al. 2003 (a)] und [SCHLEBUSCH 2005] zählen.

### 1.3.3 Mehrschichten-Schalentheorien

Eine weitere Forschungsrichtung auf dem Gebiet der Schalenmechanik stellen Mehrschichten-Schalenkinematiken (engl.: Multilayer-) dar, die anfangs in Verbindung mit geschichteten Laminaten eingeführt wurden, um die interlaminaren Effekte, insbesondere die Spannungssprünge, die durch unterschiedliche Materialeigenschaften aneinandergrenzender Schichten hervorgerufen werden, genauer zu erfassen, vgl. [REDDY 1989], [BRAUN et al. 1994], [SCHULTZ 1996], [GRUTTMANN 1996] und [BAŞAR et al. 1997]. Sie gehen aus dem Zusammensetzen von Einschichtentheorien hervor, indem zwischen den Schichten kinematische Kopplungen eingeführt werden. Eine große Anzahl von Schichten, auch mit einer reduzierten Anzahl von Termen einer polynomialen Entwicklung der Kinematik in Dickenrichtung innerhalb jeder Schicht, kommt der Approximation eines vollständigen dreidimensionalen Modelles ebenso nah, wie die Verwendung einer Multi-Direktor-Kinematik innerhalb einer Schicht. Eine Erweiterung von oberflächenorientierten Einschichten-Multi-Direktor-Schalentheorien auf Mehrschichtentheorien wird in [MATHEAS et al. 2003 (b)] vorgenommen, wobei dort die Möglichkeit des Abreißen einzelner Schichten und damit die Adaption des Modelles an durch Delamination geschädigte Laminat gegeben wird.

### 1.3.4 Faserverbundwerkstoffe

Faserverbundwerkstoffe (engl.: „composite“) bestehen aus einem Grundwerkstoff, Matrix genannt, in den Fasern eingebettet sind. Gängige Fasermaterialien sind Bor, Stahl, Carbon, Aramid und Glas. Als Matrixmaterial werden Polyester, Epoxide, Keramik und Beton bzw. Feinbeton verwendet. Zahlreiche Arbeiten, wie z. B. [HASHIN 1980], [ABOUDI 1991], [BOGDANOVICH, PASTORE 1996], [BAZANT, DESMORAT 1994], [HERAKOVICH 1998], stellen die mechanischen Eigenschaften von Verbundmaterialien, insbesondere Faserverbunden dar. Den zementgebundenen Faserverbundwerkstoffen widmen sich u. a. die Arbeiten [BENTUR, MINDESS 1990] und [HILSDORF, REINHARDT 1998], wobei letztgenannte sich u. a. mit dem sogenannten Faserbeton auseinandersetzt. Der mechanischen Modellierung der Materialkombination aus sogenannten Glasfasergelegen und Feinbeton sind u. a. die Arbeiten [CURBACH 2003], [ZASTRAU et al. 2003] und [RICHTER 2005] gewidmet.

Die Richtungen, in welche die Fasern ausgerichtet sind, können den Richtungen des Kraftflusses in Bauteilen aus Faserverbundwerkstoffen angepasst werden. Faserverbundwerkstoffe weisen zudem hohe Festigkeiten und Steifigkeiten auf. Wegen dieser und weiterer Vorteile, wie dem vergleichsweise oft niedrigeren spezifischen Gewicht und guter chemischer Beständigkeit, findet dieser Werkstoff in vielen Bereichen immer mehr Verwendung. Durch sogenanntes „Laminieren“,

d. h. Aneinanderfügen, Verbinden, Verkleben, von mehreren auch unterschiedlich orientierten Einzelschichten wird ein Schichtverbund hergestellt. Dabei entsteht entweder ein sogenanntes „Laminat“ oder ein „Sandwich“, vgl. [HÖRMANN 2002]. Laminates bestehen aus annähernd gleich dicken Einzelschichten mit annähernd gleichen mechanischen Eigenschaften aber z. B. schichtweise unterschiedlicher Faserorientierung. Sandwich-Strukturen besitzen mindestens eine in Dickenrichtung wesentlich größere und schubweichere Einzelschicht, die häufig von zwei dünnen Deckschichten mit hohen Zugfestigkeiten eingeschlossen ist. Schichtverbunde weisen also ein sehr inhomogenes Materialgefüge auf. Die Simulation des Versagens von Schichtverbunden geschieht mit mechanischen Modellen, die der jeweiligen Charakteristik der Versagensart angepasst sind. In [SCHULTZ 1996] werden einige Versagensarten einer unidirektionalen Einzelschicht, nach der Belastungsrichtung klassifiziert, angegeben, die als intralaminare Versagen bezeichnet werden. Im Zusammenhang mit Längszug kann danach Faserbruch bei unbeschädigter Matrix oder Matrixbruch bei unbeschädigten Fasern auftreten. Im Zusammenhang mit Längsdruck sind das sogenannte Mikrobeulen der Fasern, das in „out-of-phase“-Mikrobeulen und „in-phase“-Mikrobeulen unterschieden wird, und Schubversagen mit Faserbruch die häufigsten Versagensarten. Bei Querszug kann Matrixbruch oder sogenanntes Grenzschichtversagen auftreten, bei dem der Bruch durch die Matrix entlang der unbeschädigten Fasern geht. Druck quer zur Faser steht oft in Verbindung mit Schubversagen, das mit oder ohne Faserbruch auftreten kann.

Die Modellierung der Schichten innerhalb eines Laminates kann zum Einen in der Weise geschehen, dass Faser und Matrix einzeln modelliert werden, was auf Modelle mit heterogenen Einzelschichten führt. Dieses Vorgehen ist allerdings wegen des hohen Aufwands bei der numerischen Simulation des Tragverhaltens der Gesamtstruktur kaum anwendbar. Zum Anderen können Faser und Matrix in der Einzelschicht als gleichmäßig verschmiert angenommen und effektive Materialparameter ermittelt werden. Das geschieht durch Homogenisierungstechniken wie beispielsweise die Verwendung von Mischungsregeln oder von repräsentativen Volumenelementen.

### 1.3.5 Delamination

Zu den o. g. Versagensarten der unidirektionalen Einzelschicht kommt bei Laminaten die Delamination, sogenanntes interlaminares Versagen, als ein besonders wichtiger Versagensvorgang hinzu. Eine Besonderheit dieses Versagens ist, dass es meist von außen nicht zu erkennen ist, da es im Inneren eines Laminates auftritt. Die Delamination stellt einen Spezialfall des Matrixbruches dar, bei dem die Bruchfläche genau in der Grenzfläche zweier benachbarter Schichten liegt, und ist in vielen Fällen der kritische Versagensvorgang. Als Ursachen für Delamination werden in der Literatur neben einer mangelhaften Herstellung des Laminates, welche die Grenzfläche zwischen Schichten zur Schwachstelle macht, vornehmlich Spannungen in Dickenrichtung, s. [SCHULTZ 1996], diese insbesondere an freien Rändern, angegeben („Free-Edge-Effect“), s. [PAGANO 1978]. Bei rein axialer Belastung eines Laminates entstehen zudem wegen unterschiedlicher Querdehnungen aneinander grenzender Materialien Schubspannungen, welche die Kompatibilität in der Grenzfläche gewährleisten. Des Weiteren werden als Ursache für Delaminationen in der Literatur dynamische Beanspruchungen infolge Schlagbelastung, Faser-Matrix-Ablösungen oder auch bereits vorhandene Matrixrisse angegeben. Risse aus Delaminationen können zudem in Fortsetzung eines Matrixrisses von ihrem Verlauf entlang einer Grenzfläche zweier benachbarter Schichten abweichen. Das macht die eindeutige Identifikation der Versagensart schwierig und zeigt, dass Interaktionen einzelner Versagensarten eine entscheidende Rolle spielen. Für eine übersichtliche Darstellung des Delaminationsprozesses in Laminaten und eine detaillierte Auflistung von Referenzen wird [GARG 1988] angegeben.

Die Modellierung von Delamination innerhalb eines Laminates kann einerseits dadurch erfolgen, dass sie als geometrische Diskontinuität abgebildet wird. Dabei wird von einem diskreten Riss

ausgegangen, der an seiner Risspitze wegen der dort vorhandenen Spannungssingularität jedes Spannungs- bzw. Verzerrungskriterium bereits verletzen würde und damit die explizite Verwendung bruchmechanischer Kriterien ausschließt. Zum Anderen kann Delamination verschmiert in einer sogenannten Prozessschicht, häufig „Interface-Schicht“ genannt, abgebildet werden. Dabei wird nicht der Riss selbst diskretisiert, sondern es werden einzelne Materialeigenschaften der angrenzenden Schichten, die z. B. im Zusammenhang mit der Fähigkeit zur Übertragung von Schubspannungen oder Spannungen normal zum Riss stehen, verändert, was auf der Grundlage eines kontinuumsmechanischen Ansatzes geschieht. Eine umfangreiche Darstellung zu verschmierten (engl.: „smeared crack models“) und diskreten (engl.: „discrete crack models“) Rissmodellen und eine Auflistung ausgewählter Modelle zur Beschreibung von Diskontinuitäten im Rahmen der Finite-Elemente-Methode findet sich in [LÖBLEIN 2004]. Die im Zusammenhang mit Laminattheorien am häufigsten zum Einsatz kommenden Versagenskriterien, s. dazu [HILL 1948], [TSAI, WU 1971], [HASHIN 1980] und [PUCK 1996], sind: Das Kriterium der maximalen Spannungen, bei dem Versagen auftritt, wenn irgendeine Spannungskomponente die entsprechende Festigkeit übersteigt; das TSAI-HILL-Kriterium, das auf das Fließkriterium nach VON MISES zurückgeht und Spannungen in Materiallängs- und -querrichtung methodisch gleichbehandelt; das TSAI-WU-Kriterium, das eine Erweiterung des Kriteriums nach TSAI-HILL darstellt und durch zusätzliche Parameter besser experimentell angepasst werden kann; das Kriterium von HASHIN, das in seiner Versagenshypothese das unterschiedliche Verhalten von Faser und Matrix berücksichtigt und das Kriterium von PUCK, das nach einer experimentell ermittelten Versagensfläche im dreidimensionalen Spannungsraum formuliert wurde. Hinsichtlich des Versagens eines Mehrschichtlaminates werden in der Literatur zwei Hypothesen unterschieden. Die erste Hypothese, nach der in keiner Einzelschicht Versagen auftreten darf, wird mit FPF (engl.: „first ply failure“) abgekürzt. Die zweite Hypothese, nach der das Versagen einer oder auch mehrerer Einzelschichten zugelassen ist, wird mit LPF (engl.: „last ply failure“) abgekürzt. Die Last, bei der die letzte intakte Einzelschicht versagt, wird dabei als Bruchlast des Laminates bezeichnet. Die Entscheidung, ob das Versagen einzelner Schichten bzw. bereichsweise Delamination zwischen einzelnen Schichten zulässig ist, hängt vom speziellen Anwendungsfall ab.

Auch die Modellierung des Nachbruchverhaltens im Allgemeinen wird in zahlreichen Literaturstellen behandelt, von denen jedoch nur wenige auch die Versagensart Delamination mit einbeziehen. Ziel der Modellierung des Nachbruchverhaltens ist die Beurteilung der Gesamttragfähigkeit der Struktur, da diese nach einer Schädigung noch Lasten aufnehmen kann. Das häufigste Vorgehen zur Berücksichtigung von mikrostruktureller Schädigung ist die Modifikation bzw. die Reduktion der Steifigkeiten im geschädigten Bereich, durch die auch lokal auftretende Delaminationen berücksichtigt werden können. In diesem Zusammenhang sei stellvertretend auf [LEE 1982] verwiesen, der Schädigung durch Delamination bei unidirektional bewehrten Schichten durch das Null-setzen der Elastizitätsmoduli senkrecht zur Faser und der zur Dickenrichtung gehörenden Schubmoduli der angrenzenden Schichten beschreibt. Makrostrukturelle Veränderungen des Laminates, z. B. Delaminationen an freien oder gelagerten Rändern, werden dagegen als sogenannte Randeffekte behandelt, die durch eine Modifikation der kinematischen Randbedingungen erfasst werden sollten. In [HWANG, SUN 1989] wird dieses Vorgehen für ebene Systeme mit niedrigen kinematischen Ansätzen innerhalb der Schichten vorgestellt. Ein sogenanntes Multi-Referenzebenen-Modell mit diskontinuierlicher Multi-BERNOULLI-Kinematik innerhalb von ebenen Schichten wird in [STEINIGEN 2006] vorgeschlagen. Die Modifikation der mechanischen Eigenschaften führt zu einer Neuverteilung der Spannungen, so dass ggf. weitere Schädigungen bei Laststeigerung bis zum endgültigen Versagen des Laminates angenommen werden können.

### 1.3.6 Kontaktmechanik

Alle o. g. mechanischen Modelle dienen der Beschreibung von Vorgängen innerhalb jeweils eines Körpers. Kommen in einer Problemstellung mehrere Körper vor, die sich untereinander berühren können, dienen Modelle aus dem Bereich der Kontaktmechanik dazu, u. a. Kräfte zu berücksichtigen, die an den Berührungsstellen gegenseitig auf die Körper wirken. Ausgeschlossen ist die Beschreibung von Effekten, bei denen ein Materialabrieb (Verschleiß) zwischen den Körpern stattfindet. Es werden im Rahmen der Kontaktmechanik lediglich Impuls-, Energie- und Entropiebilanzen ausgewertet, die durch sogenannte Kontaktspannungen und den Wärmefluss über den gemeinsamen Kontaktrand der Körper formuliert werden, vgl. [WILLNER 2003].

Aus kinetischen Gesichtspunkten werden beim Kontakt im Allgemeinen Normal- und Tangentialkontakt getrennt betrachtet. Die Bedingungen, die für den Normalkontakt formuliert werden, müssen die gegenseitige Durchdringung der Körper verhindern. Im Tangentialkontakt wird die zwischen den Körpern auftretende Reibung, bei Unterscheidung von Haft- und Gleitzustand, durch konstitutive Gesetze bzw. Reibgesetze wie dem COULOMBSchen Reibgesetz berücksichtigt.

Aus geometrischen Gesichtspunkten sind nicht-konformer und konformer Kontakt zu unterscheiden. Beim nicht-konformen Kontakt ist die Berührungsstelle, also der gemeinsame Kontaktbereich der Körper, am Anfang der Berührung punkt- oder linienförmig. Zudem ist die anschließend entstehende Fläche der Berührung, die sogenannte Kontaktfläche, klein im Verhältnis zu den übrigen Abmessungen der Körper. Eine erste Lösung für Probleme des nicht-konformen Kontakts elastischer Körper gab [HERTZ 1882]. Beim konformen Kontakt stellt der gemeinsame Kontaktbereich der Körper demgegenüber von Anfang an eine Fläche dar.

In fast allen Fällen werden Kontaktgesetze in der Literatur in der Weise formuliert, dass zwischen den Körpern nur Druckspannungen übertragen werden. Eine der wenigen Ausnahmen stellt [RAOUS 1999] dar, der zur Beschreibung von Adhäsion zwischen zwei verschiedenen Körpern eine beschränkte Übertragung von Zugspannungen bis zu einer Grenze zulässt.

Die Zahl geschlossen lösbarer Kontaktprobleme ist wegen den auftretenden Nichtlinearitäten in den entstehenden Ungleichungssystemen stark eingeschränkt, so dass meist auf iterative Lösungsverfahren, wie das NEWTON-RAPHSON-Verfahren, zurückgegriffen werden muss. Diese Algorithmen setzen eine Linearisierung der zu lösenden nichtlinearen Gleichungen voraus, wofür von einer variationellen Formulierung ausgegangen wird. Sowohl bei der Formulierung des Normal- als auch des Tangentialkontaktproblems mit Reibung entstehen daraus Variationsungleichungen, vgl. [KIKUCHI, ODEN 1988], [LAURSEN 2002]. Konsistente Linearisierungen für das Gebiet der Kontinuumsmechanik finden sich unter anderem in [WRIGGERS 1995], [WRIGGERS 2001].

Eine grundlegende Charakterisierung des allgemeinen Kontaktproblems zwischen zwei Körpern und eine übersichtliche Darstellung der Näherungs-Lösungsmethoden für die Variationsungleichungen befindet sich in [WILLNER 2003].

## 1.4 Modellbildung in der Arbeit

Bei der Verstärkung bzw. Sanierung von Flächentragwerken, hier insbesondere solcher aus Stahlbeton, sind Tragwerksarten unterschiedlicher Lastabtragung zu unterscheiden, und zwar Scheiben, Platten und Schalen. Die wirtschaftlichste Variante der Bewehrungsführung ist im Allgemeinen die Verlegung in Richtung der Spannungstrajektorien. Der Einsatz von textilen Strukturen ist auf die Oberfläche des Bauteils beschränkt. Da die im Interface zwischen Alt- und Neukonstruktion auftretenden Spannungen sicher eine der kritischsten Beanspruchungen der Verbundkonstruktion darstellen, ist die Wahl eines mechanischen Modells mit der Referenzfläche im Interface naheliegend. Dies bedeutet für zugehörige Schalentheorien, welche die textile Verstärkungsschicht abbilden sollen, dass deren Referenzfläche auf der Oberfläche liegen sollte.

Abweichend von den klassischen Theorien, die sich auf die Schalenmittelfläche beziehen, haben Schalentheorien mit der Schalenoberfläche als Referenzfläche den Vorteil, dass die Abbildung von Variablen der Mittelfläche auf die Oberfläche entfällt, was sich insbesondere bei der Beschreibung des Verbundverhaltens mit Modellen auf der Grundlage der Kontaktmechanik als vorteilhaft erweist.

Die durch Verbunde entstehenden neuen Materialien sind meist stark anisotrop, in manchen Fällen orthotrop. Die Berücksichtigung eines vollständig dreidimensionalen Materialgesetzes innerhalb der Schalentheorie erscheint deshalb notwendig. Des Weiteren werden vollständig dreidimensionale Spannungszustände benötigt, um das Tragverhalten aneinandergrenzender Materialien in der Verbundfuge zu simulieren. Das Verhalten des Schalenkontinuums hinsichtlich Dickenänderungen während der Verformung und bei besonderen Lasteinleitungsformen beeinflusst die Verbundeigenschaften ebenfalls. Diese Forderungen bzw. Voraussetzungen entsprechen am besten den Annahmen einer Multi-Direktor-Schalentheorie. Eine Abgrenzung der dabei verwendeten kontinuumsbasierten Schalenkinematik zur Kinematik eines Volumenelementes ist nur durch die explizite Einführung der Dickenrichtung gegeben. In [SCHLEBUSCH 2005] wird bereits die Entwicklung einer oberflächenorientierten Schalentheorie ausgehend von den vollständigen kinematischen Beziehungen des Kontinuums dargelegt. Die entsprechende Kinematik wird dort anschließend vereinfacht zu einer Ein-Direktor-Kinematik, ergänzt um „locking“-vermeidende Terme, womit eine effektive oberflächenorientierte Schalentheorie geschaffen wurde. In der hier vorliegenden Arbeit wird mit der Multi-Direktor-Kinematik aus der Vielzahl in der Vergangenheit entwickelter Schalenkinematiken eine hinsichtlich der Güte der Approximation insbesondere der Schalendickenrichtung flexible Kinematik zur Modellbildung gewählt. Für diese werden hier u. a. in allgemeiner Form die in den Verschiebungsvariablen nichtlinearen vollständigen Verzerrungsmaße für eine beliebige Anzahl von Direktoren angegeben.

Darüberhinaus findet wegen der schichtweisen Aufbringung der Textilien eine Mehrschichten-Schalentheorie Verwendung. Diese besitzt jedoch in Abweichung zur klassischen Vorgehensweise in z. B. [BAŞAR et al. 1997], aber auch anderen Arbeiten, keine über die Schichten hinweg stetigen Verschiebungsfelder, sondern lässt unter kinematischen Gesichtspunkten eine freie, bzw. durch Gesetzmäßigkeiten der Kontaktkinematik und des Verbundes eingeschränkte Verschiebung der Schichten untereinander zu. Kern der vorliegenden Arbeit ist zunächst die Entwicklung einer geometrisch nichtlinearen oberflächenorientierten Mehrschichten-Schalentheorie mit schub- und dickenelastischem Verhalten ausgehend von einer vollständigen Kinematik einer Multidirektor-Theorie.

Im Rahmen der Umsetzung in die Finite-Element-Methode (FEM) werden isoparametrische Verschiebungs-Schalenelemente entwickelt.

Das Versagen des Schichtenverbundes wird durch ein Spannungskriterium beschrieben, das an aus der Literatur bekannte Vorgehensweisen angelehnt ist. Die Delamination wird hier auf der Grundlage einer kontinuumsmechanischen Herangehensweise durch Modifikation der kinematischen Bedingungen, im Unterschied zu einer bruchmechanischen Herangehensweise, berücksichtigt. In [HWANG, SUN 1989] wird dieses Vorgehen bereits für ebene Systeme mit niedrigen kinematischen Ansätzen innerhalb der Schichten vorgestellt. In der vorliegenden Arbeit wird wegen der Erweiterung auf beliebige Flächentragwerke, also insbesondere auf gekrümmte, eine Verknüpfung mit der Kontaktmechanik vorgenommen. Zur Beschreibung des Verhaltens nach Ausbildung der Delamination werden Bedingungen aus der Kontaktmechanik innerhalb der finiten Elemente benutzt, um insbesondere die Selbstdurchdringung abgelöster, frei beweglicher Bereiche von Schichten zu verhindern. Einen Vorteil dieser als „innerer Kontakt“ bezeichneten Beschreibung gegenüber klassischen Kontaktproblemen stellt die deutliche Vereinfachung der Kontaktdetektion dar. Sie findet ausschließlich zwischen Schichten innerhalb jeweils eines finiten Elementes statt.

Die für die Verschiebung potentieller Kontaktpartner, die nur Schichten jeweils ein und des selben Schalenelementes sein können, notwendigen Verschiebungsfreiheitsgrade können somit strukturell im Aufbau des zu lösenden Gleichungssystems von vorn herein bereits vorgesehen werden, ohne dabei das Gleichungssystem durch diese Freiheitsgrade zu vergrößern. Mit Hilfe einer in der vorliegenden Arbeit formulierten Verbundmatrix werden mit fortschreitender Delamination dem Gleichungssystem in effektiver Weise sukzessive Freiheitsgrade hinzugefügt. Die hier im Zusammenhang mit der Kontaktmechanik verwendeten Reibgesetze haben im Unterschied zur klassischen COULOMBSchen Reibung alle gemeinsam, dass sie im Fall von Kontakt auch bei nicht vorhandenem Kontaktdruck wirken. Die ohne Andruck zwischen den Kontaktpartnern wirkenden Tangentialspannungen tragen dem möglichen Vorhandensein von Adhäsion Rechnung.

Für den Vergleich der mit den Modellen möglichen numerischen Simulationen der mechanischen Belastung von Schichtenverbunden mit Versuchen der experimentell orientierten Teilbereiche des Sonderforschungsbereiches 528 dient der Abzug einer Lasche aus Textilbeton von einem Betongrundkörper.

## 1.5 Schreibweise

Zeichen	Ab- schnitt	Verwendung
$i$	$P$	2.2.1
$\mathbf{u}$	$S$	
		Kursivdruck: Skalare und Punkte Geradstellung und Fettdruck: Tensoren jeder Stufe im Rahmen der tensoriellen Notation Großbuchstaben: Größen im Ausgangszustand des Schalenkörpers Kleinbuchstaben: Größen im verformten Zustand des Schalenkörpers
$\square_i$	$\square^i$	2.2.1
$\square_\alpha$	$\square^\alpha$	
		nachgestellte untere oder obere Indizierung mit kleinen lateinischen Buchstaben im Kursivdruck im Rahmen der tensoriellen Notation: $i = 1, 2, 3$ nachgestellte untere oder obere Indizierung mit kleinen griechischen Buchstaben im Rahmen der tensoriellen Notation: $\alpha = 1, 2$ Die oberen Indizierungen erfolgen direkt am Buchstaben, nicht an einer Klammer, und sind so nicht mit einem Exponenten zu verwechseln.
$\square_{,i}$	$\square_{,\alpha}$	2.2.2
		nachgestellte Indizierung mit Komma gefolgt von einer natürlichen Zahl $i = 1, 2, 3$ bzw. $\alpha = 1, 2$ : partielle Ableitung nach den Koordinaten $\Theta^i$ bzw. $\Theta^\alpha$
$\square _{\Theta^3=0}$		2.2.2
		vertikaler Strich gefolgt von der Angabe eines Koordinatenwertes: Stelle für $\Theta^3$ , für die der Term auszuwerten ist Der vertikale Strich darf nicht mit der in der Tensorrechnung üblichen Darstellung einer kovarianten Ableitung verwechselt werden, die in dieser Arbeit nicht verwendet wird.
$\square_i \square^i$		2.2.2
		$\square_i \square^i = \sum_{i=1}^3 (\square_i \square^i)$ EINSTEINSche Summationskonvention im Rahmen der tensoriellen Notation: Ein Term ist über $i$ (bzw. lateinische Buchstaben) von 1 bis 3 bzw. über $\alpha$ (bzw. griechische Buchstaben) von 1 bis 2 zu summieren, wenn dieser ein Produkt aus Größen mit o. g. gegenständigen Indizierungen durch zwei gleiche Buchstaben ist. Es handelt sich dabei um eine Summe, die nicht durch ein Summenzeichen dargestellt wird.
${}_l \square$		2.2.3
		vorangestellte einfache Indizierung mit einer natürlichen Zahl $l \in \mathbb{N}$ : Darstellung von Direktoren und ihrer Maßzahlen bezüglich der jeweiligen Basissysteme sowie von mit ihnen korrespondierenden skalaren und vektoriellen Größen
$(\square)^p$		2.2.3
		nach einer Klammer hochgestellte ganze oder reelle Zahl $p \in \mathbb{R}$ : Darstellung von Potenzen
$\widehat{\square}$		2.3.3
		skalare Größe in Kursivdruck mit einem Dach jeweils mit entsprechender Indizierung: Maßzahlen bezüglich des Basissystems $\mathbf{G}^i$ des konvektiven Koordinatensystems des Schalenkörpers
$\overline{\square}$		
		skalare Größe in Kursivdruck mit einem Überstrich: Maßzahlen bezüglich des Basissystems $\mathbf{A}^i$ des konvektiven Koordinatensystems der Schalenreferenzfläche Eine skalare Größe in Kursivdruck ohne zusätzliches hochgestelltes Kennzeichen als Komponente von Tensoren erster Stufe mit entsprechender Indizierung stellt Maßzahlen bezüglich des Basissystems $\mathbf{e}^i$ des einbettenden kartesischen Koordinatensystems dar.

Zeichen	Ab- schnitt	Verwendung
$kl\Box$	2.4.1	vorangestellte zweifache Indizierung mit natürlichen Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$ : Darstellung von Termen, die aus Direktoren oder ihren Maßzahlen bezüglich der jeweiligen Basissysteme sowie aus mit Direktoren korrespondierenden skalaren Größen durch Multiplikation gebildet werden
$[ \ ]$	2.5.4	Einschließen in eckige Klammern: Matrizen im Sinne der Matrizenrechnung der Mathematik oder matrizielle Darstellung eines Tensors erster oder zweiter Stufe mit Matrixelementen, die Maßzahlen bezüglich des Basissystems $\{e_i = e^i; i = 1, 2, 3\}$ des einbettenden kartesischen Koordinatensystems sind
$\Box$		Fettdruck und zur Unterscheidung von Tensoren zusätzlicher Unterstrich: symbolische Darstellung von Matrizen Bei der Darstellung des zugehörigen Zahlenschemas steht hinter der eckigen Klammer keine Basis.
$[ \ ]_{g_i \otimes g_j}$		Basissystem durch rechte untere Indizierung hinter der Matrix: gehört zu den Maßzahlen in der Matrix, matrizielle Darstellung eines Tensors erster oder zweiter Stufe Der erste Index zählt die Zeile und der ggf. vorhandene zweite Index die Spalte. Wird diese Indizierung weggelassen, sind die Elemente der Matrix Maßzahlen bezüglich des Basissystems $\{e_i = e^i; i = 1, 2, 3\}$ des einbettenden kartesischen Koordinatensystems.
$\Box_a$	2.7	nachgestellte einfache untere Indizierung mit dem Kennzeichen „a“: steht für das Wort „äußere“ Darstellung von Skalaren, Vektoren und Matrizen, die mit dem äußeren Lastvektorfeld im Zusammenhang stehen
${}^e\Box$	${}^e\Box$ 2.9.2	vorangestellte einfache obere Indizierung mit einer natürlichen Zahl $e \in \mathbb{N}$ : Darstellung von Knotenpunkten des finiten Elementes sowie von mit ihnen korrespondierenden skalaren Größen oder Matrizen, d. h. von Termen, die einen mit der Nummerierung der Knotenpunkte korrespondierenden Index tragen
${}^e\Box$	2.9.3	vorangestellte einfache obere Indizierung mit dem Kennzeichen „e“: steht für das Wort „Element“, Darstellung von Spaltenvektoren, die alle Knotenverschiebungen bzw. inneren oder äußeren Kräfte aller Knoten des finiten Ein- oder Mehrschichten-Elementes zusammenfassen, sogenannter „Elementverschiebungsvektor“ bzw. „Elementkraftvektor“
${}^e\mathbf{K}_T$	2.9.3	zusätzlich zur Indizierung mit dem Kennzeichen „e“ nachgestellte einfache untere Indizierung mit dem Kennzeichen „T“: steht für das Wort „tangential“, Darstellung der tangentialen Steifigkeitsmatrix eines finiten Elementes
${}^{sf}\mathbf{K}_{TL}$	3.2.6	Darstellung einer tangentialen Steifigkeitsmatrix eines Mehrschichtenelementes, in der nur die Steifigkeitselemente der Schicht $B_L$ für die Knotenpunkte $s$ und $f$ zusammengefasst sind

Zeichen	Ab- schnitt	Verwendung
$\overset{sf}{\underset{nm}{\square}}_{jp}$	2.9.3	<p>vorangestellte zweifache untere und obere und nachgestellte zweifache untere Indizierung mit natürlichen Zahlen <math>s, f, n, m, j, p \in \mathbb{N}</math>: Darstellung der Elemente der tangentialen Steifigkeitsmatrix</p> <p>Die Reihenfolge der Indizierung erfolgt entsprechend der Berechnung derart, dass die inneren Indizierungen <math>f, m, j</math> die selben Indizierungen wie die der Element-Knotenverschiebung sind, nach der die erste Ableitung der Verzerrungsmaße gebildet wurde und die äußeren Indizierungen <math>s, n, p</math> die selben Indizierungen wie die der Element-Knotenverschiebung sind, nach der die zweite Ableitung der Verzerrungsmaße bei der Berechnung gebildet wurde.</p>
$\overset{sf}{\underset{nm}{\square}}_{jpL}$	3.2.6	wie oben, jedoch mit zusätzlicher Indizierung durch eine natürliche Zahl $L \in \mathbb{N}$ als Kennzeichnung für die Schicht $\mathcal{B}_L$
$\square_L \quad \square_{\square L}$	3.2.1	nachgestellte einfache untere Indizierung mit einer natürlichen Zahl $L \in \mathbb{N}$ , die gegebenenfalls auch zusätzlich neben anderen Indizierungen an dieser Stelle, jedoch immer als letzte Indizierung von mehreren in der Reihe aber immer vor der Kennzeichnung einer ggf. vorhandenen partiellen Ableitung steht: Darstellung aller skalaren, vektoriellen bzw. tensoriellen und matriziellen Größen sowie Punkte und Mengen, die zur Schicht $\mathcal{B}_L$ gehören
$\square^v$	3.2.6	nachgestellte einfache obere Indizierung mit dem Kennzeichen „v“ neben weiteren Indizierungen: steht für das Wort „vollständig“, Kennzeichnung von Spaltenvektoren und Matrizen, die Verschiebungen bzw. innere oder äußere Kräfte eines finiten Mehrschichten-Elementes zusammenfassen
$\square^r$	3.3.2	nachgestellte einfache obere Indizierung mit dem Kennzeichen „r“ neben weiteren Indizierungen: steht für das Wort „reduziert“
$\square_N \quad \square^N$	4.4.1	nachgestellte einfache untere oder obere Indizierung mit dem Kennzeichen „N“: steht für das Wort „normal“
$\square_K \quad \square^K$	4.4.1	nachgestellte einfache untere oder obere Indizierung mit dem Kennzeichen „K“: steht für das Wort „Kontakt“
$\overset{sf}{\underset{nm}{\square}}_{jpLM}$	4.4.2	<p>vorangestellte zweifache untere und obere und nachgestellte vierfache untere Indizierung mit natürlichen Zahlen <math>s, f, n, m, j, p, L, M \in \mathbb{N}</math>: Darstellung der Elemente der tangentialen Kontakt-Elementsteifigkeitsmatrix</p> <p>Die Reihenfolge der Indizierung erfolgt entsprechend der Berechnung derart, dass die inneren Indizierungen <math>f, m, j, L</math> die selben Indizierungen wie die der Element-Knotenverschiebung sind, nach der die erste Ableitung der Abstandsgröße (zweier Kontaktpartner) gebildet wurde und die äußeren Indizierungen <math>s, n, p, M</math> die selben Indizierungen wie die der Element-Knotenverschiebung sind, nach der die zweite Ableitung der Abstandsgröße bei der Berechnung gebildet wurde. Der Kontakt-Elementvektor erhält seine Indizierung analog dazu nur aus der ersten Ableitung der Abstandsgröße.</p>

## 2 Einschichten-Schalentheorie

### 2.1 Allgemeines

Im Folgenden werden die Grundlagen zur Formulierung eines neuen finiten Elementes vorgestellt. Die dem Element zu Grunde gelegte Schalentheorie basiert auf Formulierungen, die u. a. in [SCHULTZ 1996], [KRÄTZIG 1993], [BAŞAR et al. 1997], [ECKSTEIN 1999] zu finden sind, und ist an die besonderen Ansprüche bei der Simulation von flächenhaftem Verbund angepasst.

### 2.2 Geometrie

Nachfolgende Erläuterungen beziehen sich auf einen Ausschnitt aus allgemeinen, beliebig ein- oder mehrfach gekrümmten Schalenstrukturen, wie er beispielsweise als Teil einer Kuppelschale in Abb. 2.1 gekennzeichnet ist.

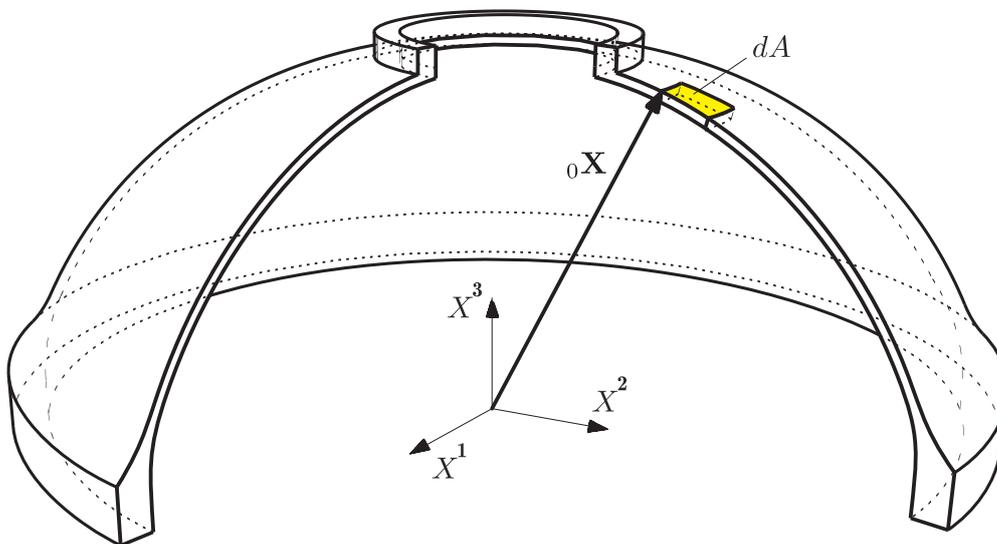


Abbildung 2.1: Kuppelschale

#### 2.2.1 Schalenkörper und Schalenreferenzfläche

Die Punkte des dreidimensionalen EUKLIDischen Raumes  $\mathbb{R}^3$  werden durch die Einführung eines raumfesten kartesischen Koordinatensystems mit den Koordinaten  $X^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) identifiziert. Zu diesem Koordinatensystem gehöre das Basissystem  $\{\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i; i = 1, 2, 3\}$ .

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Werte  $i = 1, 2, 3$  im Rahmen der tensoriellen Notation durch nachgestellte untere Indizierung  $\square_i$  oder obere Indizierung  $\square^i$  mit kleinen lateinischen Buchstaben im Kursivdruck und die Werte  $\alpha = 1, 2$  im Rahmen der tensoriellen Notation durch nachgestellte untere Indizierung  $\square_\alpha$  oder obere Indizierung  $\square^\alpha$  mit kleinen griechischen Buchstaben symbolisiert werden. Diese oberen Indizierungen erfolgen direkt am Buchstaben, nicht an einer Klammer, und sind so nicht mit einem Exponenten zu verwechseln.

Es wird nun ein dreidimensionaler unverformter Schalenkörper  $\mathcal{B}$  betrachtet, der in den EUKLIDischen Raum eingebettet ist und durch die Schalenlaibungen und die Schalenberandung begrenzt wird. Zur Beschreibung der Differentialgeometrie des unverformten Schalenkörpers wird eine Parametrisierung durch krummlinige, konvektive Koordinaten  $\Theta^\alpha$  und die Normalenkoordinate  $\Theta^3$  durchgeführt, d. h. es wird ein krummliniges, konvektives Koordinatensystem mit den

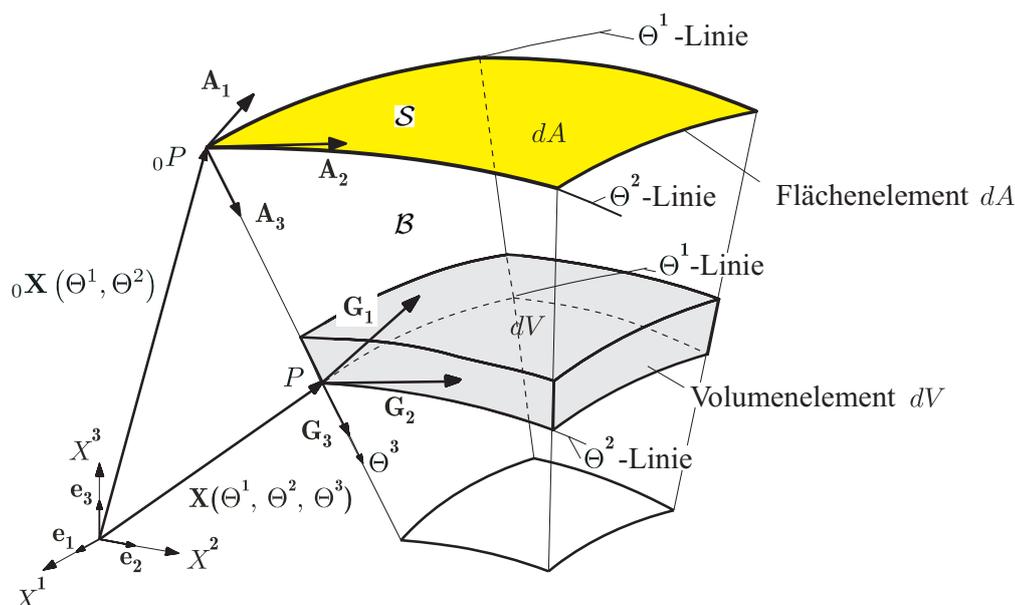


Abbildung 2.2: Differentialgeometrie des unverformten Schalenkörpers

Koordinaten  $\Theta^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) eingeführt, vgl. Abb. 2.2. Zwischen diesem und dem raumfesten kartesischen Koordinatensystem bestehe eine umkehrbar eindeutige Transformation der Form

$$X^i = X^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3). \quad (2.1)$$

Der Ortsvektor zu einem materiellen Punkt  $P$  in  $\mathcal{B}$  ist durch

$$\mathbf{X} = X^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

eingeführt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass Tensoren jeder Stufe im Rahmen der tensoriellen Notation durch Geradstellung und Fettdruck und alle Skalare und Punkte durch Kursivdruck gekennzeichnet werden.

Innerhalb von  $\mathcal{B}$  lässt sich für  $\Theta^3 = 0$  eine Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}$  definieren, die durch die Koordinaten  $\Theta^\alpha$  parametrisiert wird. Es wird speziell eine Schalenlaibung als Referenzfläche gewählt, woraus die Bezeichnung „oberflächenorientierte Schalentheorie“ für die nachfolgend beschriebene Schalentheorie resultiert. Die Koordinatenlinie  $\Theta^3$  verläuft im unverformten Zustand orthogonal zur Schalenreferenzfläche entlang einer Geraden und ist im Intervall

$$0 \leq \Theta^3 \leq H \quad (2.3)$$

definiert, wobei  $H = H(\Theta^1, \Theta^2) = \{H^*\}$  der dimensionslose Wert der entlang der Referenzfläche geringfügig veränderlichen Schalendicke  $H^* = \{H^*\} [H^*]$  ist. Der Ortsvektor zu einem materiellen Punkt  ${}_0P$  in  $\mathcal{S}$  ist durch

$${}_0\mathbf{X} = X^i(\Theta^1, \Theta^2, 0) \mathbf{e}_i \quad (2.4)$$

eingeführt.

Damit lassen sich alle notwendigen differentialgeometrischen Größen, die zur kontinuumsmechanischen Beschreibung notwendig sind, zusammenstellen, vgl. z. B. [KLINGBEIL 1989].

### 2.2.2 Basissystem der Schalenreferenzfläche

Aus (2.2) erhält man die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}_i$  durch

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{X}_{,i}|_{\Theta^3=0} . \quad (2.5)$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die partielle Ableitung nach den Koordinaten  $\Theta^i$  stets durch nachgestellte Indizierung mit Komma  $\square_{,i}$  gefolgt von einer natürlichen Zahl  $i = 1, 2, 3$  symbolisiert wird. Der zusätzliche vertikale Strich gefolgt von der Angabe eines Koordinatenwertes kennzeichnet die Stelle, für welche die Ableitung auszuwerten ist, und darf nicht mit der in der Tensorrechnung üblichen Darstellung einer kovarianten Ableitung verwechselt werden, die in dieser Arbeit nicht verwendet wird.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Basisvektoren besteht in der Verwendung von (2.4) zur Ermittlung der an  $\mathcal{S}$  tangentialen Basisvektoren

$$\mathbf{A}_\alpha = {}_0\mathbf{X}_{,\alpha} \quad (2.6)$$

und von (2.6) zusammen mit der Orthogonalitätsbedingung der Koordinatenlinie  $\Theta^3$  im unverformten Zustand zur Ermittlung eines normierten Normalenvektors

$$\mathbf{A}_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|} . \quad (2.7)$$

Durch

$$\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}^j = \delta_i^j \quad (2.8)$$

sind die kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}^j$  der Schalenreferenzfläche gegeben, wobei  $\delta_i^j$  das KRONECKER-Symbol ist. Dabei ergibt sich  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}_3$ . Durch

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta \\ &= A_{\alpha\beta} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta = \delta_\alpha^\beta \mathbf{A}_\beta \otimes \mathbf{A}^\alpha = \mathbf{A}_\alpha \otimes \mathbf{A}^\alpha \end{aligned} \quad (2.9)$$

wird der RIEMANNsche Metriktensor der unverformten Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}$ , dessen Maßzahlen  $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$  symmetrisch sind, berechnet.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass im Rahmen der tensoriellen Notation die EINSTEINSche Summationskonvention Anwendung findet, nach der ein Term über  $i$  (bzw. lateinische Buchstaben) von 1 bis 3 bzw. über  $\alpha$  (bzw. griechische Buchstaben) von 1 bis 2 zu summieren ist, wenn dieser ein Produkt aus Größen mit o. g. gegenständigen Indizierungen durch gleichen Buchstaben ist, d. h. z. B.  $\square_j \square^j = \sum_{j=1}^3 (\square_j \square^j)$ . Es handelt sich dabei um eine Summe, die nicht durch ein Summenzeichen dargestellt wird.

Durch

$$dA = \sqrt{A} d\Theta^1 d\Theta^2 \quad \text{mit} \quad A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \quad (2.10)$$

ist die Fläche des differentiellen Flächenelementes  $dA$  der unverformten Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}$  zu berechnen, deren Normale die gleiche Richtung und Orientierung wie der Basisvektor  $\mathbf{A}_3$  hat.

Die Länge eines differentiellen Bogenelementes  $dS_{\mathcal{S}}^{\alpha}$  entlang der  $\Theta^{\alpha}$ -Linie innerhalb der unverformten Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}$  wird durch

$$dS_{\mathcal{S}}^{\alpha} = \sqrt{A_{\alpha\alpha}} d\Theta^{\alpha} \quad (2.11)$$

berechnet, vgl. [DAMME 2000], wobei in diesem Ausdruck nicht über  $\alpha$  zu summieren ist. Des Weiteren wird der Krümmungstensor

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\mathbf{A}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} \mathbf{A}^{\alpha} \otimes \mathbf{A}^{\beta} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \mathbf{A}^{\alpha} \otimes \mathbf{A}^{\beta} \\ &= B_{\alpha\beta} \mathbf{A}^{\alpha} \otimes \mathbf{A}^{\beta} = B_{\beta}^{\alpha} \mathbf{A}_{\alpha} \otimes \mathbf{A}^{\beta} = -\mathbf{A}_{3,\alpha} \otimes \mathbf{A}^{\alpha} \end{aligned} \quad (2.12)$$

der Schalenreferenzfläche, dessen Maßzahlen  $B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$  symmetrisch sind, benötigt. Mit Hilfe der Maßzahlen des Krümmungstensors werden noch zwei weitere Krümmungsmaße, die mittlere Krümmung

$$B_{\text{H}} = \frac{1}{2} (B_1^1 + B_2^2) \quad (2.13)$$

und die GAUSSsche Krümmung

$$B_{\text{K}} = B_1^1 B_2^2 - B_2^1 B_1^2 \quad (2.14)$$

angegeben. Zum besseren Verständnis dieser Maße sei an dieser Stelle erwähnt, dass sich für die Form der Kugel  $B_{\text{H}} = 1/R_{\text{K}}$  und  $B_{\text{K}} = 1/R_{\text{K}}^2$  ergibt, wenn  $R_{\text{K}}$  der Radius der Kugel ist.

### 2.2.3 Direktoren

Der Ortsvektor  $\mathbf{X}$  des Schalenkörpers wird durch die unendliche Reihe

$$\mathbf{X}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \sum_{l=0}^{\infty} ({}_l\Omega(\Theta^3) {}_l\mathbf{X}(\Theta^1, \Theta^2)) \quad (2.15)$$

dargestellt, wobei

$${}_l\mathbf{X} = {}_lX^i(\Theta^1, \Theta^2) \mathbf{e}_i \quad (2.16)$$

den  $l$ -ten Direktor der Schale und  ${}_0\mathbf{X}$  den Referenzflächen-Ortsvektor, vgl. (2.4), darstellen. Letzterer wird im Zusammenhang mit einer systematischen Benennung aller Reihenglieder gelegentlich auch als nullter Direktor bezeichnet.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung von Direktoren und ihrer Maßzahlen bezüglich der jeweiligen Basissysteme sowie von mit ihnen korrespondierenden skalaren und vektoriellen Größen stets durch die vorangestellte einfache Indizierung  ${}_l\Box$  mit einer natürlichen Zahl  $l \in \mathbb{N}$  erfolgt.

Die Direktoren hängen nur von den Koordinaten  $\Theta^1$  und  $\Theta^2$ , durch welche die Schalenreferenzfläche parametrisiert wird, ab. Das Funktionensystem  ${}_l\Omega$ , als Basisfunktion bezeichnet, ermöglicht in der Approximation (2.15) die geometrische Beschreibung des Schalenkontinuums in Schalendickenrichtung. Für die Basisfunktion wird das vollständige Funktionensystem

$${}_l\Omega(\Theta^3) = (\Theta^3)^l \quad \text{mit } 0 \leq l < \infty \quad (2.17)$$

gewählt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung von Potenzen stets durch eine nach einer Klammer  $(\square)^p$  hochgestellte ganze oder reelle Zahl  $p \in \mathbb{R}$  erfolgt.

Die Wahl einer Potenzfunktion an dieser Stelle führt zu einer anschaulichen Beschreibung der Geometrie des Schalenkörpers. Bricht man die unendliche Reihe in (2.15) nach dem  $(d + 1)$ -ten Glied bei Verwendung von (2.17) ab, d. h. würde man neben dem Ortsvektor  $d$  frei wählbare Direktoren zur Beschreibung der Geometrie des unverformten Schalenraumes verwenden, könnte die Geometrie des Schalenkörpers in Dickenrichtung durch Potenzfunktionen  $d$ -ten Grades approximiert werden.

Der Verlauf der  $\Theta^3$ -Linie wurde für den unverformten Zustand jedoch bereits als normal zur Schalenreferenzfläche und auf einer Geraden vorausgesetzt. Demnach kann der Ortsvektor  $\mathbf{X}$  des Schalenkörpers in diesem Fall mit dem Referenzflächen-Ortsvektor und den Direktoren

$${}_0\mathbf{X}; \quad {}_1\mathbf{X} = \mathbf{A}_3; \quad {}_2\mathbf{X} = {}_3\mathbf{X} = \dots = {}_d\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

durch

$$\mathbf{X}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \sum_{l=0}^d ({}_l\Omega(\Theta^3) {}_l\mathbf{X}(\Theta^1, \Theta^2)) = {}_0\mathbf{X} + \Theta^3 \mathbf{A}_3 \quad (2.19)$$

beschrieben werden, vgl. [ECKSTEIN 1999]. Die Vereinbarungen, die hier zur Geometrie des Ausgangszustandes getroffen wurden, führen dazu, dass zu deren Beschreibung der Ortsvektor zur Schalenreferenzfläche und der 1. Direktor ausreichen, vgl. (2.19). Sollen bereits in der Ausgangsgeometrie Schalenkörper beschrieben werden können, deren Ränder z. B. in Dickenrichtung krummlinig begrenzt sind, müssen die Direktoren  ${}_l\mathbf{X}$  in (2.18) für  $l > 0$  anders eingeführt werden.

#### 2.2.4 Basissystem des Schalenkörpers

Aus (2.2) erhält man die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}_i$  und die kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}^i$  des Schalenkörpers analog (2.5) und (2.8) durch

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i}; \quad \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad (2.20)$$

sowie den Metriktensor  $\mathbf{G}$  des unverformten Schalenkörpers  $\mathcal{B}$  durch

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \delta_i^j \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}^i = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Durch

$$\begin{aligned} dV &= (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3 d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \\ &= \sqrt{G} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \quad \text{mit} \quad G = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} \end{aligned} \quad (2.22)$$

ist das Volumen eines differentiellen Volumenelementes  $dV$  des unverformten Schalenkörpers  $\mathcal{B}$  zu berechnen. Durch

$$dA_{\mathcal{B}}^\alpha = \sqrt{G^{\beta\beta}} G d\Theta^\alpha d\Theta^3 \quad \text{mit} \quad \beta \neq \alpha \quad (2.23)$$

ist die Fläche des differentiellen Flächenelementes  $dA_{\mathcal{B}}^{\alpha}$  im unverformten Schalenkörper  $\mathcal{B}$ , das durch die Koordinatenlinien  $\Theta^{\alpha}$ ,  $\Theta^{\alpha} + d\Theta^{\alpha}$ ,  $\Theta^3$  und  $\Theta^3 + d\Theta^3$  berandet wird, zu berechnen. Die Orientierung dieser Fläche

$$d\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{\alpha} = \frac{\mathbf{G}^{\beta}}{|\mathbf{G}^{\beta}|} dA_{\mathcal{B}}^{\alpha} \quad \text{mit } \beta \neq \alpha \quad (2.24)$$

wird durch den Basisvektor  $\mathbf{G}^{\beta}$  festgelegt. Die Länge eines differentiellen Bogenelementes  $dS_{\mathcal{B}}^i$  entlang der  $\Theta^i$ -Linie innerhalb des unverformten Schalenkörpers  $\mathcal{B}$  wird durch

$$dS_{\mathcal{B}}^i = \sqrt{G_{ii}} d\Theta^i \quad (2.25)$$

berechnet, wobei in diesem Ausdruck nicht über  $i$  zu summieren ist. Verwendet man den Ortsvektor  $\mathbf{X}$  des Schalenkörpers nach (2.19) zur Berechnung der kovarianten Basisvektoren in (2.20) erhält man

$$\mathbf{G}_i = ({}_0\mathbf{X} + \Theta^3 \mathbf{A}_3)_{,i} \quad (2.26)$$

und daraus

$$\mathbf{G}_{\alpha} = \mathbf{A}_{\alpha} + \Theta^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} = \mathbf{A}_{\alpha} - \Theta^3 \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_{\alpha} = \mathbf{A}_{\alpha} - \Theta^3 B_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{A}_3. \quad (2.28)$$

### 2.2.5 Schalentensor

Um alle Berechnungen von Größen im unverformten Schalenraum vollständig auf Größen der unverformten Schalenreferenzfläche zurückzuführen, wird der sogenannte Schalentensor  $\boldsymbol{\mu}$  ( $\Theta^3$ ), auch Shifter genannt, angegeben. Dieser wird im unverformten Zustand definiert zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \mu_i^j \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}^i = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{A}^i = \mathbf{A} - \Theta^3 \mathbf{B} + \mathbf{G}_3 \otimes \mathbf{A}^3 \\ &= (\delta_{\alpha}^{\lambda} - \Theta^3 B_{\alpha}^{\lambda}) \mathbf{A}_{\lambda} \otimes \mathbf{A}^{\alpha} + \mathbf{G}_3 \otimes \mathbf{A}^3 \\ &= \mu_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda} \otimes \mathbf{A}^{\alpha} + \mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{A}^3. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Mit dessen Hilfe erhält man aus (2.28) durch Umformung die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren zu

$$\mathbf{G}_i = \boldsymbol{\mu} \mathbf{A}_i = \mu_i^j \mathbf{A}_j; \quad \mathbf{G}^i = \boldsymbol{\mu}^{-T} \mathbf{A}_i \quad (2.30)$$

und das Volumen des differentiellen Volumenelementes  $dV$ , vgl. [ECKSTEIN 1999] zu

$$dV = \mu \sqrt{A} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \quad (2.31)$$

mit der Determinante

$$\mu = \det \boldsymbol{\mu} = \mu_1^1 \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^1 = \sqrt{\frac{G}{A}} = 1 - 2\Theta^3 B_H + (\Theta^3)^2 B_K \quad (2.32)$$

des Schalentensors, die entsprechend der Definition der Determinante von Tensoren aus den gemischtvarianten Maßzahlen berechnet werden kann. Letzterer Darstellung liegt zudem eine Reihenentwicklung der Metrik (2.21) des Schalenraumes auf der Grundlage der Metrik (2.9) der Schalenreferenzfläche zu Grunde, vgl. [BAŞAR, KRÄTZIG 1985].

## 2.3 Einschichtenkinematik

### 2.3.1 Verformter Schalenkörper

Der Punkt  $p$  im verformten Zustand des Schalenkörpers bezeichnet den selben materiellen Punkt wie Punkt  $P$  im unverformten Zustand des Schalenkörpers  $\mathcal{B}$ , vgl. Abb. 2.3. Analog (2.2) wird der Ortsvektor zu einem materiellen Punkt  $p$  im verformten Schalenkörper durch

$$\mathbf{x} = x^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{e}_i \quad (2.33)$$

eingeführt. Dieser wird wie in (2.15) durch die unendliche Reihe

$$\mathbf{x}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \sum_{l=0}^{\infty} ({}_l\Omega(\Theta^3) {}_l\mathbf{x}(\Theta^1, \Theta^2)) \quad (2.34)$$

dargestellt, wobei

$${}_l\mathbf{x} = {}_l x^i(\Theta^1, \Theta^2) \mathbf{e}_i \quad (2.35)$$

gilt. Man nennt  ${}_l\mathbf{x}$  für  $l > 0$  den  $l$ -ten Direktor der Schale im verformten Zustand und  ${}_0\mathbf{x}$  den Ortsvektor der verformten Referenzfläche.

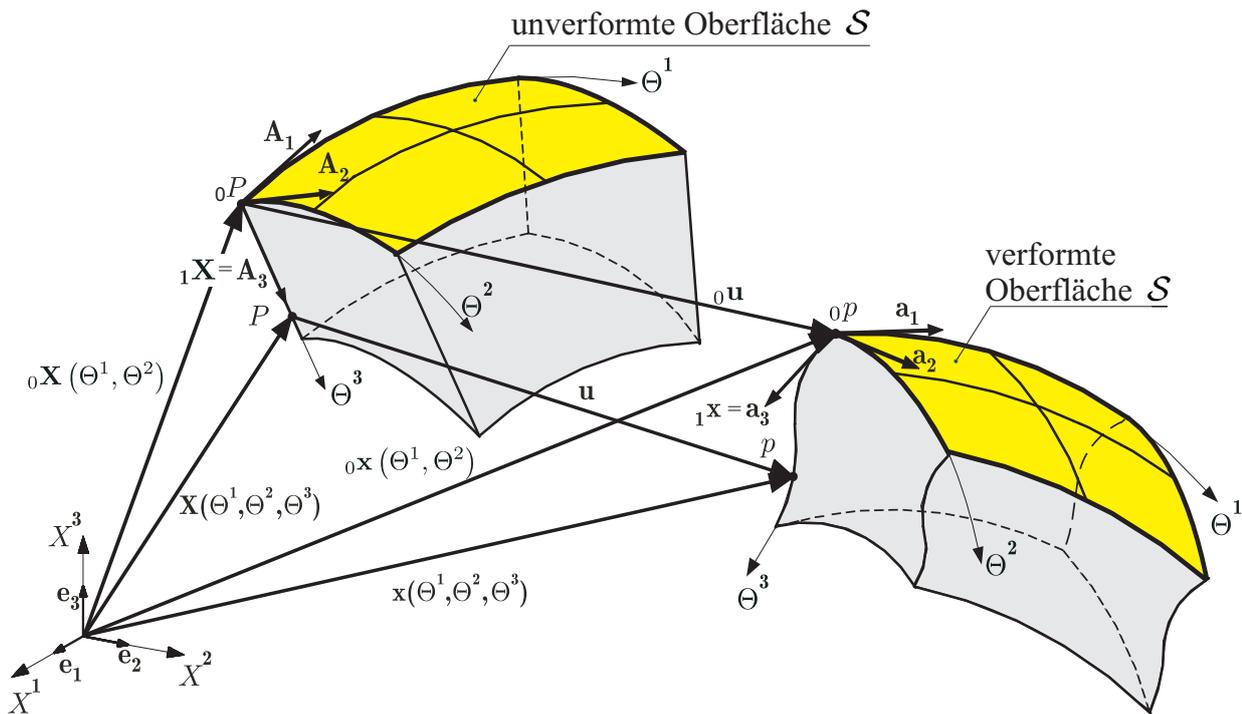


Abbildung 2.3: Referenzkonfiguration und verformte Konfiguration eines Teils des Schalenkörpers mit der Oberfläche als Referenzfläche

### 2.3.2 Basissysteme der verformten Schale

Die Basisvektoren im Schalenkörper werden analog (2.20) durch

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i}; \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad (2.36)$$

ermittelt, aus denen analog (2.21) der Metriktensor

$$\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.37)$$

des verformten Schalenkörpers und durch

$$\widehat{\mathbf{g}} = g_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (2.38)$$

der CAUCHY-GREEN-Tensor berechnet werden können. Die Basisvektoren ergeben sich mit den in (2.17) gewählten Basisfunktion  ${}_l\Omega$  und entsprechend der in (2.18) bzw. (2.19) verwendeten Anzahl  $d$  von Direktoren zu

$$\mathbf{g}_\alpha = \sum_{l=0}^d \left( (\Theta^3)^l {}_l\mathbf{x}_{,\alpha} \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_3 = \sum_{l=1}^d \left( l (\Theta^3)^{l-1} {}_l\mathbf{x} \right) . \quad (2.39)$$

Die Basisvektoren

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{x}_{,i}|_{\Theta^3=0} ; \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j \quad (2.40)$$

der verformten Referenzfläche ergeben sich mit den in (2.17) gewählten Basisfunktion  ${}_l\Omega(\Theta^3)$  zu

$$\mathbf{a}_\alpha = {}_0\mathbf{x}_{,\alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{g}_3|_{\Theta^3=0} = {}_1\mathbf{x} . \quad (2.41)$$

### 2.3.3 Kinematische Variablen

Zur Ermittlung eines Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$ , vgl. Abb. 2.3, wird die Differenz der Ortsvektoren (2.34) und (2.15) zum selben materiellen Punkt  $p$  bzw.  $P$  im verformten und unverformten Zustand

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} ({}_l\Omega(\Theta^3) ({}_l\mathbf{x}(\Theta^1, \Theta^2) - {}_l\mathbf{X}(\Theta^1, \Theta^2))) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} ({}_l\Omega(\Theta^3) {}_l\mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2)) \end{aligned} \quad (2.42)$$

gebildet. Dadurch ist die dem  $l$ -ten Direktor der Schale zugeordnete Verschiebung

$${}_l\mathbf{u} = {}_l\mathbf{x} - {}_l\mathbf{X} = {}_l u_i \mathbf{e}^i = {}_l u^i \mathbf{e}_i = {}_l \bar{u}_j \mathbf{A}^j = {}_l \widehat{u}^k \mathbf{G}_k \quad (2.43)$$

mit der der Schalenreferenzfläche zugeordneten Verschiebung  ${}_0\mathbf{u}$  eingeführt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung von Komponenten von Tensoren erster Stufe, in vorstehendem Fall dem Vektor  ${}_l\mathbf{u}$ , in dieser Arbeit stets in der Weise erfolgen soll, dass Maßzahlen bezüglich des Basissystems  $\mathbf{e}^i$  des einbettenden kartesischen Koordinatensystems als skalare Größe in Kursivdruck ohne zusätzliches hochgestelltes Kennzeichen, Maßzahlen bezüglich des Basissystems  $\mathbf{A}^i$  des konvektiven Koordinatensystems der Schalenreferenzfläche als skalare Größe in Kursivdruck mit einem Überstrich  $\bar{\square}$  und Maßzahlen bezüglich des Basissystems  $\mathbf{G}^i$  des konvektiven Koordinatensystems des Schalenkörpers als skalare Größe in Kursivdruck mit einem Dach  $\widehat{\square}$  jeweils mit entsprechender Indizierung dargestellt werden.

Zur Bestimmung der inneren kinematischen Variablen hat sich damit die Darstellung des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$  ( $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ ) durch ein vollständiges Funktionensystem  ${}_l\Omega$  ( $\Theta^3$ ) ergeben, durch das, nach dem WEIERSTRASSschen Approximationssatz, vgl. [KRÄTZIG 1993], das exakte Verschiebungsfeld eines dreidimensionalen Körpers beliebig genau approximiert werden kann. Entsprechend der in (2.18) bzw. (2.19) bei der Darstellung der Geometrie des unverformten Schalenkörpers verwendeten Anzahl  $d$  von Direktoren ergibt sich für den Punkt  $P$  die Verschiebung

$$\mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \sum_{l=0}^d ({}_l\Omega(\Theta^3) {}_l\mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2)) . \quad (2.44)$$

Mit diesem Schritt, der Reduktion der unendlichen Reihe auf eine endliche Anzahl von Gliedern, ist ein entscheidender Schritt zur Darstellung verschiedener Schalenkinematiken vollzogen, die wiederum zu zahlreichen unterschiedlichen Schalentheorien führen können, vgl. dazu Abb. 2.4.

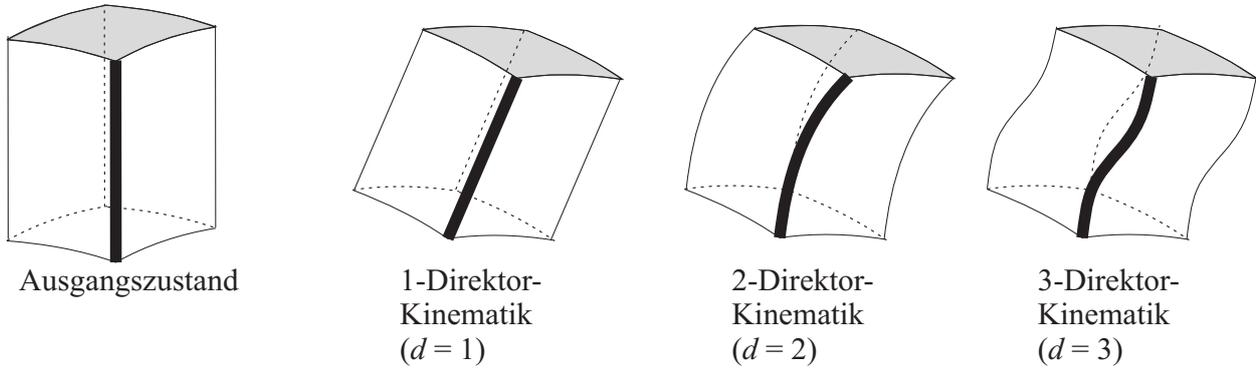


Abbildung 2.4: Multidirektor-Kinematiken – mögliche Verformung des Schalenkörpers bei unterschiedlichen Kinematiken

### Spezialfälle und Beispiel.

Wird für  $d = 0$  gewählt, verbleibt nur der Verschiebungsvektor der Referenzfläche. Darauf kann eine Schalentheorie mit Normalenhypothese aufgebaut werden, die ohne zusätzliche Freiheitsgrade für die Punkte im Schalenkontinuum auskommt. Wird für  $d = 1$  gewählt, also reduziert man die unendliche Reihe auf zwei Glieder und verhindert außerdem die Möglichkeit der Verschiebung der Punkte des Schalenkörpers in die Schalendickenrichtung relativ zur Referenzfläche, also wählt in (2.43)  ${}_1\bar{u}_3 = 0$ , und fordert kleine Verschiebungen und Verschiebungsableitungen, erhält man mit der in (2.17) gewählten Basisfunktion  ${}_l\Omega = (\Theta^3)^l$  näherungsweise die REISSNER-MINDLIN-Kinematik, wie sie in [REISSNER 1944] für Platten Verwendung fand. Mit der in (2.17) gewählten Basisfunktion  ${}_l\Omega = (\Theta^3)^l$  ergibt sich für  $d > 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= {}_0\mathbf{x} - {}_0\mathbf{X} + \Theta^3 ({}_1\mathbf{x} - {}_1\mathbf{X}) + \sum_{l=2}^d \left( (\Theta^3)^l ({}_l\mathbf{x} - {}_l\mathbf{X}) \right) \\ &= {}_0\mathbf{u} + \Theta^3 (\mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3) + \sum_{l=2}^d \left( (\Theta^3)^l {}_l\mathbf{u} \right) . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Aus (2.42) folgt u. a. auch

$${}_1\mathbf{u} = \mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3 . \quad (2.46)$$

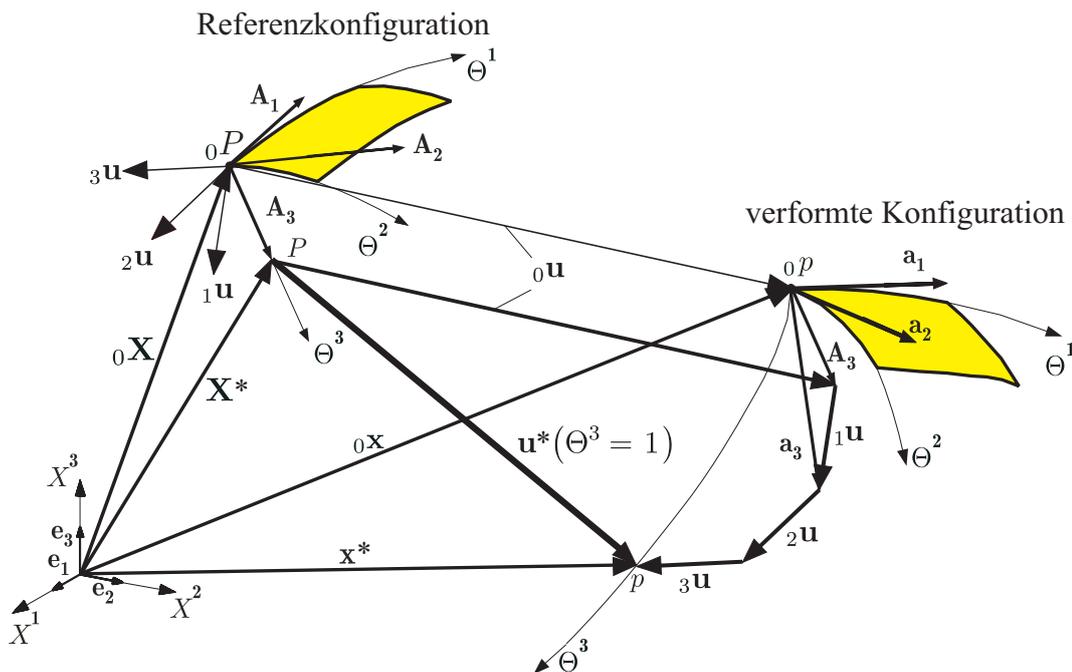


Abbildung 2.5: Kinematik mit Direktoren der Schale, dargestellt für  $\Theta^3 = 1$

Ein Überblick über mögliche Schalenkinematiken findet sich u. a. in [SCHLEBUSCH 2005]. Für einen Reihenabbruch nach dem vierten Glied

$$\mathbf{u}^* = {}_0\mathbf{u} + \Theta^3 {}_1\mathbf{u} + (\Theta^3)^2 {}_2\mathbf{u} + (\Theta^3)^3 {}_3\mathbf{u}, \quad (2.47)$$

wobei die Kennzeichnung des Reihenansatzes durch den Stern für  $d = 3$  steht, sind in Abb. 2.5 die entsprechenden Verschiebungsvektoren  ${}_0\mathbf{u}$  der Oberfläche und die drei weiteren Direktorverschiebungen  ${}_1\mathbf{u}$ ,  ${}_2\mathbf{u}$ ,  ${}_3\mathbf{u}$  exemplarisch für einen Punkt  $P$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{X}^* = X^i(\Theta^1, \Theta^2, 1) \mathbf{e}_i$  dargestellt.

### 2.3.4 Deformationsgradient

Ein infinitesimales Linienelement  $d\mathbf{x}$  am Punkt  $p$  im verformten Schalenkörper geht aus einem infinitesimalen Linienelement  $d\mathbf{X}$  am Punkt  $P$  im unverformten Schalenkörper durch Transformation

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.48)$$

mit dem Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{x}_{,i} \otimes \mathbf{G}^i = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad (2.49)$$

einem Tensor zweiter Stufe, hervor. Weitere häufig verwendete Formen des Deformationsgradienten sind die transponierte, die inverse und die transponierte inverse Darstellung, vgl. [ECKSTEIN 1999]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T &= \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \\ \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \\ \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Mit Hilfe des Deformationsgradienten erhält man die ko- und kontravarianten Basisvektoren (2.36) im verformten Schalenkörper zu

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G}^i. \quad (2.51)$$

## 2.4 Verzerrungsmaße

Zur späteren Formulierung von Arbeitsausdrücken erfolgt in diesem Abschnitt die Berechnung von Verzerrungsmaßen. Die in der virtuellen inneren Arbeit zu verwendenden Kraft- und Verformungsgrößen werden hier auf die Ausgangskonfiguration bezogen. Obwohl die im Zusammenhang mit dem in der Modellierung verwendeten Material zu erwartenden Verzerrungen des Schalenkörpers als klein angenommen werden können und eine lineare Berechnung praktisch oft ausreicht, werden hier in der Formulierung der Verzerrungsmaße geometrische Nichtlinearitäten berücksichtigt, da im Zusammenhang mit der anschließend vorgenommenen Modellerweiterung für Kontakt ohnehin ein iterativer Lösungsalgorithmus verwendet wird.

### 2.4.1 Verzerrungstensor

Für jeden Punkt  $P$  des unverformten Schalenkörpers  $\mathcal{B}$ , der durch den Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  in den Punkt  $p$  des verformten Schalenkörpers übergeht, kann dazu der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor, ein Tensor zweiter Stufe,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{G}) = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (2.52)$$

berechnet werden, der mit den Verzerrungsmaßzahlen  $E_{ij}$  bezüglich des kontravarianten Basissystems  $\mathbf{G}^i$  des unverformten Schalenkörpers dargestellt wird. Aus (2.36) wird mit (2.42) der Metriktensor  $\mathbf{g}$  des verformten Schalenkörpers aus den Basisvektoren

$$\mathbf{g}_i = (\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,i} = \mathbf{G}_i + \mathbf{u}_{,i} \quad (2.53)$$

berechnet. Setzt man diese in (2.52) ein, lassen sich die Verzerrungsmaßzahlen

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{G}_i + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \quad (2.54)$$

durch die Projektion der Verschiebungsänderungen entlang der  $\Theta^i$ -Koordinatenlinien in das Basissystem des unverformten Schalenkörpers  $\mathbf{G}_j$  darstellen, wobei der dritte Summand in (2.54) die geometrische Nichtlinearität in den Verzerrungsmaßen liefert. Die Maßzahlen  $E_{ij} = E_{ji}$  sind symmetrisch. Eine Alternative wäre die Berechnung des EULER-ALMANSI-Verzerrungstensors, bei dem eine geeignete Darstellung im Basissystem des verformten Schalenkörpers  $\mathbf{g}_j$  erfolgt. Die in (2.54) vorkommenden Basisvektoren können durch die in (2.28) angegebenen Beziehungen ersetzt werden, so dass die Verzerrungsmaßzahlen, die nach wie vor auf die kontravariante Basis des Schalenkörpers bezogen sind, durch die Basisvektoren der Schalenreferenzfläche berechnet werden können. Es ergibt sich für die Referenzflächen-Verzerrungsmaße

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{G}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{G}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot (\mathbf{A}_\beta - \Theta^3 B_\beta^\lambda \mathbf{A}_\lambda) + \mathbf{u}_{,\beta} \cdot (\mathbf{A}_\alpha - \Theta^3 B_\alpha^\lambda \mathbf{A}_\lambda) + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha - \Theta^3 \mathbf{A}_\lambda \cdot (B_\beta^\lambda \mathbf{u}_{,\alpha} + B_\alpha^\lambda \mathbf{u}_{,\beta}) + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta}), \end{aligned} \quad (2.55)$$

für die Schubverzerrungsmaße in Schnittflächen des Schalenkörpers normal zur Schalenreferenzfläche

$$\begin{aligned} E_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 + \mathbf{u}_{,3} \cdot (\mathbf{A}_\alpha - \Theta^3 B_\alpha^\lambda \mathbf{A}_\lambda) + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,3}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 + \mathbf{u}_{,3} \cdot \mathbf{A}_\alpha - \Theta^3 B_\alpha^\lambda \mathbf{A}_\lambda \cdot \mathbf{u}_{,3} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,3}) = E_{3\alpha} \end{aligned} \quad (2.56)$$

und für das Verzerrungsmaß in Schalendickenrichtung

$$E_{33} = \frac{1}{2} (2 \mathbf{u}_{,3} \cdot \mathbf{A}_3 + \mathbf{u}_{,3} \cdot \mathbf{u}_{,3}) . \quad (2.57)$$

Für die Berechnung der in den Verzerrungsmaßen vorkommenden partiellen Ableitungen des Verschiebungsvektors wird das Verschiebungsfeld (2.44) mit den Verschiebungen der Direktoren  ${}_l \mathbf{u} (\Theta^1, \Theta^2)$  und der den Direktoren zugeordneten Basisfunktion  ${}_l \Omega (\Theta^3)$  abgeleitet. Dabei ergibt sich

$$\mathbf{u}_{,\alpha} = \sum_{l=0}^d {}_l \Omega {}_l \mathbf{u}_{,\alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_{,3} = \sum_{l=0}^d {}_l \Omega_{,3} {}_l \mathbf{u} . \quad (2.58)$$

Mit den Reihen (2.58) werden die Verzerrungsmaße zu

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{l=0}^d {}_l \Omega ({}_l \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + {}_l \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha - \Theta^3 \mathbf{A}_\lambda \cdot (B_\beta^\lambda {}_l \mathbf{u}_{,\alpha} + B_\alpha^\lambda {}_l \mathbf{u}_{,\beta})) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{k=0}^d {}_k \Omega {}_k \mathbf{u}_{,\alpha} \right) \cdot \left( \sum_{l=0}^d {}_l \Omega {}_l \mathbf{u}_{,\beta} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} E_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{l=0}^d ({}_l \Omega {}_l \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 + {}_l \Omega_{,3} {}_l \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}_\alpha - \Theta^3 B_\alpha^\lambda \mathbf{A}_\lambda)) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{k=0}^d {}_k \Omega {}_k \mathbf{u}_{,\alpha} \right) \cdot \left( \sum_{l=0}^d {}_l \Omega_{,3} {}_l \mathbf{u} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} E_{33} &= \sum_{l=0}^d {}_l \Omega_{,3} {}_l \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_3 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^d {}_k \Omega_{,3} {}_k \mathbf{u} \right) \cdot \left( \sum_{l=0}^d {}_l \Omega_{,3} {}_l \mathbf{u} \right) , \end{aligned} \quad (2.61)$$

wobei wegen der nichtlinearen Anteile durch das Skalarprodukt  $\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}$  ein quadratisches Polynom mit  $(d+1)^2$  Gliedern für jedes Paar  $i, j$  entsteht. Die Verzerrungsmaße werden im Folgenden

nach der Potenz der Dickenkoordinate und nach der Basisfunktion durch die Einführung von Teilverzerrungsmaßen geordnet, vgl. [ MATHEAS et al. 2003 (a)]. Es entsteht:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \left( {}_l a_{\alpha\beta} {}_l \Omega - \Theta^3 {}_l b_{\alpha\beta} {}_l \Omega + \sum_{k=0}^d ({}_{kl} c_{\alpha\beta} {}_k \Omega {}_l \Omega) \right) \quad (2.62)$$

$$E_{3\alpha} = E_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \left( {}_l d_{\alpha 3} {}_l \Omega + {}_l e_{\alpha 3} {}_l \Omega_{,3} - \Theta^3 {}_l f_{\alpha 3} {}_l \Omega_{,3} + \sum_{k=0}^d ({}_{kl} g_{\alpha 3} {}_k \Omega {}_l \Omega_{,3}) \right) \quad (2.63)$$

$$E_{33} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \left( {}_l h_{33} {}_l \Omega_{,3} + \sum_{k=0}^d ({}_{kl} i_{33} {}_k \Omega_{,3} {}_l \Omega_{,3}) \right) \quad (2.64)$$

mit den Teilverzerrungsmaßen

$${}_l a_{\alpha\beta} = {}_l \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + {}_l \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha \quad (2.65)$$

$${}_l b_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\lambda \cdot (B_\beta^\lambda {}_l \mathbf{u}_{,\alpha} + B_\alpha^\lambda {}_l \mathbf{u}_{,\beta}) \quad (2.66)$$

$${}_{kl} c_{\alpha\beta} = {}_k \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot {}_l \mathbf{u}_{,\beta} \quad (2.67)$$

$${}_l d_{\alpha 3} = {}_l \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 \quad (2.68)$$

$${}_l e_{\alpha 3} = {}_l \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_\alpha \quad (2.69)$$

$${}_l f_{\alpha 3} = B_\alpha^\lambda \mathbf{A}_\lambda \cdot {}_l \mathbf{u} \quad (2.70)$$

$${}_{kl} g_{\alpha 3} = {}_k \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot {}_l \mathbf{u} \quad (2.71)$$

$${}_l h_{33} = 2 {}_l \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_3 \quad (2.72)$$

$${}_{kl} i_{33} = {}_k \mathbf{u} \cdot {}_l \mathbf{u} . \quad (2.73)$$

Die in (2.62) bis (2.64) entstandenen Glieder mit den nichtlinearen Anteilen, d. h. mit den Teilverzerrungsmaßen (2.67), (2.71) und (2.73) sind durch eine weitere Summe innerhalb der aus der Reihendarstellung herrührenden Summe dargestellt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung von Termen, die aus Direktoren oder ihren Maßzahlen bezüglich der jeweiligen Basissysteme sowie aus mit Direktoren korrespondierenden skalaren Größen durch Multiplikation gebildet werden, durch vorangestellte zweifache Indizierung  ${}_{kl} \square$  mit natürlichen Zahlen  $k, l \in \mathbb{N}$  erfolgt.

Die Teilverzerrungsmaße (2.66) und (2.70) sind die aus der Krümmung der Schale resultierenden Anteile. Das Teilverzerrungsmaß (2.65) resultiert aus dem linearen, krümmungsunabhängigen Anteil des Referenzflächen-Verzerrungsmaßes, die Teilverzerrungsmaße (2.68) und (2.69) resultieren aus den linearen, krümmungsunabhängigen Anteilen des Schubverzerrungsmaßes, und das Teilverzerrungsmaß (2.72) resultiert aus dem linearen, krümmungsunabhängigen Anteil des Verzerrungsmaßes in Schalendickenrichtung.

## 2.4.2 Verzerrungstensor der Oberfläche

Für jeden Punkt  ${}_0 P$  der unverformten Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}$ , der durch den Verschiebungsvektor  ${}_0 \mathbf{u}$  in den Punkt  ${}_0 p$  der verformten Schalenreferenzfläche übergeht, kann aus (2.52) der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor der Oberfläche

$$\mathbf{E}_\mathcal{S} = \mathbf{E}|_{\Theta^3=0} = \overline{E}_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j \quad (2.74)$$

der oberflächenorientierten Einschichten-Schalentheorie berechnet werden, der mit den Verzerrungsmaßzahlen  $\bar{E}_{ij}$  bezüglich des kontravarianten Basissystems  $\mathbf{A}^i$  der unverformten Schalenreferenzfläche dargestellt wird. Es entsteht

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} {}_0a_{\alpha\beta} {}_0\Omega + {}_{00}c_{\alpha\beta} {}_0\Omega {}_0\Omega \quad (2.75)$$

$$\bar{E}_{3\alpha} = \bar{E}_{\alpha 3} = \frac{1}{2} ({}_0d_{\alpha 3} {}_0\Omega + {}_1e_{\alpha 3} {}_1\Omega_{,3} + {}_{01}g_{\alpha 3} {}_0\Omega {}_1\Omega_{,3}) \quad (2.76)$$

$$\bar{E}_{33} = \frac{1}{2} {}_1h_{33} {}_1\Omega_{,3} + {}_{11}i_{33} {}_1\Omega_{,3} {}_1\Omega_{,3} \quad (2.77)$$

mit den Teilverzerrungsmaßen (2.65) bis (2.73), wobei die krümmungsabhängigen Teilverzerrungsmaße (2.66) und (2.70) in der Einschichtentheorie hier wegen  $\Theta^3 = 0$  verschwinden, vgl. (2.62) und (2.63). Diese Verzerrungsmaßzahlen ergeben sich mit den in (2.17) gewählten Basisfunktionen  ${}_i\Omega(\Theta^3)$ , die in (2.75) bis (2.77) alle den Wert 1 annehmen, zu

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} ({}_0\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + {}_0\mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha) + {}_0\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot {}_0\mathbf{u}_{,\beta} \quad (2.78)$$

$$\bar{E}_{3\alpha} = \bar{E}_{\alpha 3} = \frac{1}{2} ({}_0\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 + {}_1\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_\alpha + {}_0\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot {}_1\mathbf{u}) \quad (2.79)$$

$$\bar{E}_{33} = {}_1\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_3 + {}_1\mathbf{u} \cdot {}_1\mathbf{u}. \quad (2.80)$$

Es ist zu erkennen, dass hierin ausschließlich die Verschiebungen  ${}_0\mathbf{u}$  und  ${}_1\mathbf{u}$  des Ortsvektors und des ersten Direktors auftreten. Dennoch sind die entstandenen Verzerrungsmaße (2.78) bis (2.80) der Oberfläche - unabhängig von der gewählten Approximation (2.44) der Verschiebungen des Schalenkörpers - exakt, da alle höheren Glieder verschwinden.

Auf der Grundlage dieser Verzerrungsmaße werden später in Abschnitt 2.6 ein Spannungstensor der Oberfläche, vgl. Abschnitt 2.5.2, und auf dessen Grundlage wiederum ein Spannungsvektor der Oberfläche, vgl. Abschnitt 2.5.4, ermittelt. Letzterer dient später im Zusammenhang mit einer erweiterten oberflächenorientierten Mehrschichten-Schalentheorie als Grundlage zur Ermittlung einer Kontakt-Normal- und Kontakt-Tangential-Spannung, vgl. die Abschnitte 4.4.2 und 4.4.3.

## 2.5 Spannungen

In diesem Abschnitt wird zunächst ein Spannungstensor zur Verwendung in einem Arbeitsausdruck eingeführt, der zum in Abschnitt 2.4 eingeführten Verzerrungstensor energetisch konjugiert ist. Für diesen werden anschließend Spannungsmaße bezüglich eines orthogonalen, normierten Basissystems angegeben, so dass eine einfache Auswertung des dreidimensionalen Spannungszustandes im Zusammenhang mit materialspezifischen Spannungskriterien insbesondere für Verbundversagen gewährleistet wird.

### 2.5.1 Spannungstensoren

Der auf ein beliebiges differentielles Flächenelement  $da_B$  des verformten Schalenkörpers bezogene Schnittkraftvektor  $df_B$  im Punkt  $p$  wird mit Hilfe des CAUCHY-Theorems durch lineare Abbildung

$$\frac{df_B}{da_B} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_B; \quad df_B = \boldsymbol{\sigma} \cdot da_B; \quad da_B = da_B \mathbf{n}_B \quad (2.81)$$

mit dem CAUCHYSchen Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.82)$$

und dem entsprechend der Orientierung des Flächenelementes beliebig gerichteten normierten Normalenvektor  $\mathbf{n}_B$  des Flächenelementes  $d\mathbf{a}_B$  des verformten Schalenkörpers verknüpft. Unter Ausnutzung der Transformation (2.48) kann (2.81) in die Darstellung

$$d\mathbf{f}_B = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}_B \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.83)$$

überführt werden. Der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{P}$ , der sich aus der Analogie der Darstellungen (2.81) und (2.83) ergibt, verknüpft das Flächenelement  $d\mathbf{A}_B$  des unverformten Schalenkörpers mit dem Schnittkraftvektor  $d\mathbf{f}_B$  des verformten Schalenkörpers. Um auf eine Darstellung ausschließlich bezüglich des unverformten Schalenkörpers zu gelangen, wird der fiktive Schnittkraftvektor

$$d\mathbf{F}_B = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}_B \quad (2.84)$$

im Punkt  $P$  im unverformten Schalenkörper eingeführt. Hierbei wird für den Schnittkraftvektor das selbe Transformationsverhalten wie für die Linienelemente (2.48) zu Grunde gelegt. Das heißt, der Schnittkraftvektor wird als konvektive Größe behandelt. Besonderheiten, die damit verbunden sind, zeigt die Veranschaulichung an einem beispielhaft gewählten speziellen Deformationsvorgang eines Körpers in Abschnitt 2.5.5 auf. Es lässt sich mit (2.84) analog (2.81) formulieren:

$$d\mathbf{F}_B = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}_B \quad (2.85)$$

mit

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} . \quad (2.86)$$

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{S}$ , der sich aus der Analogie der Darstellungen (2.81), (2.83) und (2.85) ergibt, verknüpft das Flächenelement  $d\mathbf{A}_B$  des unverformten Schalenkörpers mit dem fiktiven Schnittkraftvektor  $d\mathbf{F}_B$  im Punkt  $P$ , vgl. [DOLL 1998]. Die PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen 2. Art

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j , \quad (2.87)$$

die für jeden Punkt  $P$  durch die Spannungsmaßzahlen  $S^{ij}$  im kovarianten Basissystem des unverformten Schalenkörpers dargestellt werden können, sind im Sinne der später zu definierenden virtuellen inneren Arbeit zu den eingeführten GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungsmaßen (2.52) konjugiert, was z. B. in [SCHLEBUSCH 2005] gezeigt wurde. Aus (2.86) erhält man mit den in (2.50) angegebenen Funktionen des Deformationsgradienten und (2.82)

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \det \mathbf{F} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \cdot (\sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{G}_j \\ S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j &= \det \mathbf{F} \sigma^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j , \end{aligned} \quad (2.88)$$

woraus die Beziehung der eingeführten Spannungsmaßzahlen zueinander deutlich wird.

### 2.5.2 Spannungstensor der Oberfläche

Werden die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen (2.87) an einem Punkt  ${}_0P$  in der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}$ , die Teil des Schalenkörpers  $\mathcal{B}$  ist, berechnet, ergeben sich die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen der Oberfläche

$$\mathbf{S}_{\mathcal{S}} = \mathbf{S}|_{\Theta^3=0} = \bar{S}^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \quad (2.89)$$

mit den Spannungsmaßzahlen  $\bar{S}^{ij}$  bezüglich des kovarianten Basissystems  $\mathbf{A}_i$  der unverformten Schalenreferenzfläche. Diese können mit Hilfe von (2.86) bzw. (2.88) in CAUCHY-Spannungen der Oberfläche

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} = \bar{\sigma}^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j = \boldsymbol{\sigma}|_{\Theta^3=0} \quad (2.90)$$

am Punkt  ${}_0P$  transformiert werden, der der selbe materielle Punkt ist, der sich im unverformten Zustand im Punkt  ${}_0P$  befindet. Die zugehörigen Spannungsmaßzahlen  $\bar{\sigma}^{ij}$  lassen sich bezüglich des kovarianten Basissystems  $\mathbf{a}_i$  der verformten Schalenreferenzfläche geeignet darstellen. Durch diese Spannungstensoren der Oberfläche werden nach wie vor vollständige dreidimensionale Spannungszustände dargestellt.

Auf der Grundlage des Spannungstensors der Oberfläche wird später ein Oberflächen-Spannungsvektor, vgl. Abschnitt 2.5.4, ermittelt. Letzterer dient später im Zusammenhang mit einer erweiterten oberflächenorientierten Mehrschichten-Schalentheorie als Grundlage zur Ermittlung einer Kontakt-Normal- und Kontakt-Tangential-Spannung, vgl. die Abschnitte 4.4.2 und 4.4.3.

### 2.5.3 Orthonormale Basissysteme

Für eine einfache ingenieurmäßige Auswertung des Spannungszustandes werden physikalische Spannungen mit Spannungsmaßzahlen, die auf ein orthonormales, d. h. orthogonales und normiertes Basissystem bezogen sein müssen, berechnet.

#### Koordinatensystem im Schalenraum im unverformten Zustand.

Das Koordinatensystem mit den konvektiven Koordinaten  $\Theta^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) besitzt im unverformten Zustand das Basissystem  $\{\mathbf{M}^i = \mathbf{M}_i; i = 1, 2, 3\}$ . Dieses Koordinatensystem wird - der Schalengeometrie angepasst - für den Punkt  $P$  des unverformten Schalenkörpers so gewählt, dass die durch seine Basisvektoren  $\mathbf{M}_1$  und  $\mathbf{M}_2$  aufgespannte Ebene parallel zur Tangentialebene im Punkt  ${}_0P$  der Schalenreferenzfläche ist. Das heißt, dass die Basisvektoren  $\mathbf{G}_1$  und  $\mathbf{G}_2$  und auch  $\mathbf{G}^1$  und  $\mathbf{G}^2$  sich in der durch die Basisvektoren  $\mathbf{M}_1$  und  $\mathbf{M}_2$  aufgespannten Ebene befinden und

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{G}_3 = \mathbf{G}^3 \quad (2.91)$$

ist. Der Basisvektor  $\mathbf{M}_1$  sei um den frei wählbaren physikalischen Winkel

$$\omega = \omega \mathbf{G}_3 \quad (2.92)$$

gegenüber dem Basisvektor  $\mathbf{G}_1$  um die Schalennormale gedreht, vgl. Abb. 2.6, so dass gilt:

$$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{G}_1 = \sqrt{G_{11}} \cos \omega. \quad (2.93)$$

Er ergibt sich aus der Transformation

$$\mathbf{M}_1 = \widehat{M}_1^1 \mathbf{G}_1 + \widehat{M}_1^2 \mathbf{G}_2, \quad (2.94)$$

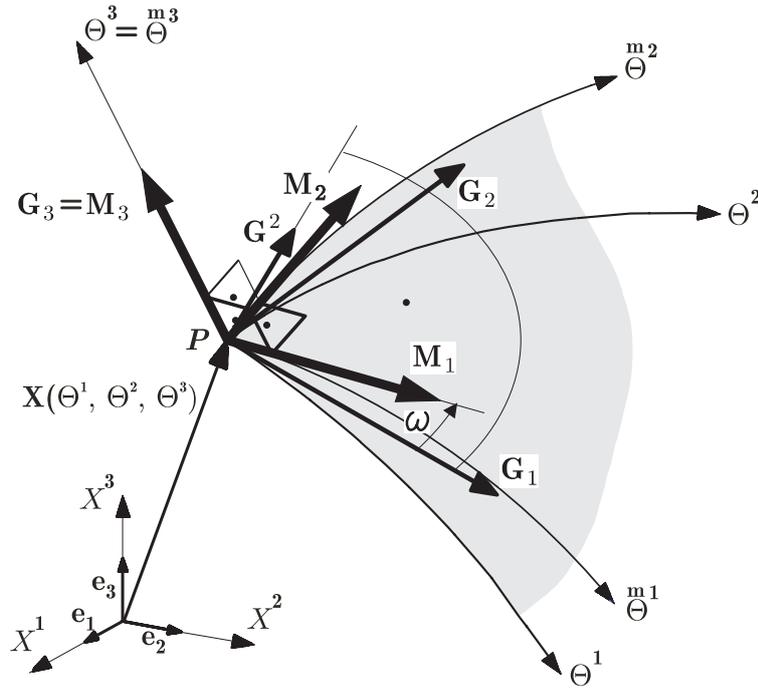


Abbildung 2.6: Definition eines normierten kartesischen Koordinatensystems

wobei der Transformationskoeffizient

$$\widehat{M}_1^2 = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{G}^2 = \sqrt{G^{22}} \cos(90^\circ - \omega) = \sqrt{G^{22}} \sin \omega \quad (2.95)$$

direkt aus der der Tensorrechnung zu Grunde liegenden Bedingung, dass die ko- und kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}_1$  und  $\mathbf{G}^2$  senkrecht aufeinander stehen, ermittelt werden kann. Wendet man (2.93) auf (2.94) an, entsteht

$$\sqrt{G_{11}} \cos \omega = \widehat{M}_1^1 G_{11} + \widehat{M}_1^2 G_{21}, \quad (2.96)$$

woraus durch Umformung der Transformationskoeffizient

$$\widehat{M}_1^1 = \frac{1}{G_{11}} \left( \sqrt{G_{11}} \cos \omega - G_{21} \sqrt{G^{22}} \sin \omega \right) \quad (2.97)$$

entsteht. Der Basisvektor  $\mathbf{M}_2$  ergibt sich analog (2.94) aus der Transformation

$$\mathbf{M}_2 = \widehat{M}_2^1 \mathbf{G}_1 + \widehat{M}_2^2 \mathbf{G}_2, \quad (2.98)$$

wobei die Transformationskoeffizienten

$$\widehat{M}_2^1 = -\frac{1}{G_{11}} \left( \sqrt{G_{11}} \sin \omega + G_{21} \sqrt{G^{22}} \cos \omega \right) \quad (2.99)$$

$$\widehat{M}_2^2 = \sqrt{G^{22}} \cos \omega \quad (2.100)$$

aus (2.97) und (2.95) aus Vergrößerung des Winkels  $\omega$  um  $\pi/2$  hervorgehen.

### Koordinatensystem im Schalenraum im verformten Zustand.

Das Koordinatensystem mit den konvektiven Koordinaten  $\Theta^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) besitzt im Punkt  $p$

des verformten Schalenkörpers den Basisvektor  $\mathbf{m}_1$  des normierten, orthogonalen Basissystems  $\{\mathbf{m}^i = \mathbf{m}_i; i = 1, 2, 3\}$ , das nachfolgend berechnet wird. Die Basisvektoren  $\mathbf{m}_2$  und  $\mathbf{m}_3$  gehören nicht zu den Koordinatenlinien  $\overset{\text{m}}{\Theta}^2$  und  $\overset{\text{m}}{\Theta}^3$ , da die Koordinaten  $\overset{\text{m}}{\Theta}^i$  im Punkt  $p$  der verformten Konfiguration keine orthogonalen Koordinatenlinien mehr sind. Der Basisvektor  $\mathbf{m}_1$  lässt sich wie in (2.48) mit Hilfe des Deformationsgradienten und anschließender Normierung erhalten:

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\mathbf{m}'_1}{\sqrt{\mathbf{m}'_1 \cdot \mathbf{m}'_1}}; \quad \mathbf{m}'_1 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_1. \quad (2.101)$$

Aus der Beziehung

$$\cos \omega' = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{g}_1}{\sqrt{g_{11}}}. \quad (2.102)$$

kann der Betrag  $\omega'$  des Winkels  $\omega'$  ermittelt werden, um den der Basisvektor  $\mathbf{m}_1$  gegenüber dem Basisvektor  $\mathbf{g}_1$  um die Schalennormale

$$\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \quad (2.103)$$

im verformten Zustand gedreht ist, wobei

$$\mathbf{m}_2 = -\frac{1}{g_{11}} \left( \sqrt{g_{11}} \sin \omega' + g_{21} \sqrt{g^{22}} \cos \omega' \right) \mathbf{g}_1 + \sqrt{g^{22}} \cos \omega' \mathbf{g}_2 \quad (2.104)$$

analog (2.98), (2.99) und (2.100) als senkrecht auf  $\mathbf{m}_1$  stehender Vektor berechnet werden kann.

### Koordinatensystem in der Schalenreferenzfläche im verformten Zustand.

In gleicher Weise wird im Punkt  ${}_0p$  der Schalenreferenzfläche im verformten Zustand das Basissystem  $\{\bar{\mathbf{m}}^i = \bar{\mathbf{m}}_i; i = 1, 2, 3\}$  für das Koordinatensystem mit den Koordinaten  $\overset{\text{m}}{\Theta}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) eingeführt. Es entstehen durch Berechnung aller Größen mit den Koordinaten des Punktes  ${}_0p$  der Schalenreferenzfläche analog (2.101), (2.104) und (2.103) die Basisvektoren

$$\bar{\mathbf{m}}^i = \bar{\mathbf{m}}_i = \mathbf{m}^i \Big|_{\Theta^3=0} = \mathbf{m}_i \Big|_{\Theta^3=0} \quad (2.105)$$

eines normierten, orthogonalen Basissystems, bei dem  $\bar{\mathbf{m}}_1$  durch den Winkel  $\bar{\omega}'$  mit dem Betrag  $\bar{\omega}'$ , analog (2.102), gegenüber  $\mathbf{a}_1$  gedreht ist.

## 2.5.4 Physikalische Spannungsmaße

### Spannungen im Schalenraum.

Aus der Koordinatentransformation

$$\sigma_{\text{m}}^{kl} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{m}^k \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{m}^l \quad (2.106)$$

zwischen Basissystemen am Punkt  $P$  und  $p$  im Schalenkörper gehen Spannungsmaßzahlen  $\sigma_{\text{m}}^{kl}$  hervor, die auf das eingeführte orthogonale, normierte Basissystem mit den Basisvektoren  $\mathbf{m}_k$  nach (2.101), (2.104) und (2.103) bezogen sind. In Erweiterung zu der am häufigsten anzutreffenden Darstellung (2.82) des CAUCHY-Spannungstensors können beliebig viele weitere Darstellungen dieses Tensors vorgenommen werden. Die Maßzahlen (2.106) gehören damit zum CAUCHY-Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \sigma_{\text{m}}^{kl} \mathbf{m}_k \otimes \mathbf{m}_l = \sigma_{\text{h}}^{ij} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j \quad (2.107)$$

und können zu einer Matrix zusammengefasst werden, so dass

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_m^{11} & \sigma_m^{12} & \sigma_m^{13} \\ \sigma_m^{21} & \sigma_m^{22} & \sigma_m^{23} \\ \sigma_m^{31} & \sigma_m^{32} & \sigma_m^{33} \end{bmatrix}_{\mathbf{m}_k \otimes \mathbf{m}_l} \quad \text{mit} \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_m^{11} & \sigma_m^{12} & \sigma_m^{13} \\ \sigma_m^{21} & \sigma_m^{22} & \sigma_m^{23} \\ \sigma_m^{31} & \sigma_m^{32} & \sigma_m^{33} \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

entsteht.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass Matrizen im Sinne der Matrizenrechnung der Mathematik durch das Einschließen in eckige Klammern  $[ \ ]$  dargestellt werden und für diese Zahlendarstellungen die üblichen Rechenregeln der Matrizenrechnung gelten. Zudem sei darauf hingewiesen, dass die symbolische Darstellung von Matrizen hier stets durch Fettdruck und zur Unterscheidung von Tensoren durch einen zusätzlichen Unterstrich  $\underline{\quad}$  erfolgt. Bei der Darstellung des zugehörigen Zahlenschemas steht hinter der eckigen Klammer keine Basis.

Des Weiteren sei darauf hingewiesen, dass, sofern es sich um die matrizielle Darstellung eines Tensors erster oder zweiter Stufe handelt, das zu den Maßzahlen in der Matrix gehörende Basissystem durch rechte untere Indizierung, bspw.  $[ \ ]_{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j}$ , hinter der Matrix angegeben wird. Dabei zählt der erste Index die Zeile und der ggf. vorhandene zweite Index die Spalte. Wird diese Indizierung weggelassen, sind die Elemente der Matrix Maßzahlen bezüglich des Basissystems  $\{\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i; i = 1, 2, 3\}$  des einbettenden kartesischen Koordinatensystems.

Die Hauptspannungen des CAUCHY-Spannungstensors lassen sich durch das Lösen der Gleichung

$$\det(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_h^{ii} \underline{\mathbf{1}}) = 0 \quad (2.109)$$

errechnen, wobei  $\underline{\mathbf{1}}$  die  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix ist.

Durch Auswerten von (2.109) erhält man eine Gleichung dritten Grades, deren Lösungen  $\sigma_h^{11}$ ,  $\sigma_h^{22}$  und  $\sigma_h^{33}$  die gesuchten Hauptspannungen darstellen. Sie sind die Eigenwerte des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$ . Es gilt:  $\sigma_h^{ij} = 0$  für alle  $i \neq j$ . Die Basisvektoren

$$\mathbf{h}'_i = h_i^k \mathbf{m}_k, \quad (2.110)$$

welche die Hauptspannungsrichtungen angeben, ergeben sich aus der Gleichung

$$(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_h^{ii} \underline{\mathbf{1}}) \cdot \mathbf{h}'_i = \underline{\mathbf{0}}, \quad (2.111)$$

in die die aus (2.109) berechneten  $\sigma_h^{ii}$  eingesetzt werden. Die Lösungen sind Eigenvektoren des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$ . In normierter Form

$$\mathbf{h}_i = \frac{\mathbf{h}'_i}{\sqrt{\mathbf{h}'_i \cdot \mathbf{h}'_i}} \quad (2.112)$$

bilden sie ein orthogonales, normiertes Basissystem  $\{\mathbf{h}^i = \mathbf{h}_i; i = 1, 2, 3\}$ .

### Spannungen in der Oberfläche.

Eine analoge Darstellung bezüglich des am Punkt  ${}_0p$  in der Schalenreferenzfläche berechneten Basissystems  $\overline{\mathbf{m}}_k$  kann für die in (2.90) eingeführten CAUCHY-Spannungen in der Oberfläche

$$\boldsymbol{\sigma}_S = \sigma_m^{kl} \overline{\mathbf{m}}_k \otimes \overline{\mathbf{m}}_l \quad \text{mit} \quad \sigma_m^{kl} = \overline{\sigma}^{ij} \mathbf{a}_i \cdot \overline{\mathbf{m}}^k \mathbf{a}_j \cdot \overline{\mathbf{m}}^l \quad (2.113)$$

vorgenommen werden. Aus dieser Darstellung wird im Punkt  ${}_0p$  mit Hilfe des normierten Normalenvektors  $\overline{\mathbf{m}}^3$  des Flächenelementes  $da_S$  der verformten Schalenreferenzfläche der Spannungsvektor

$$\boldsymbol{\sigma}_K = \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \overline{\mathbf{m}}^3 = \sigma_m^{k3} \overline{\mathbf{m}}_k \quad (2.114)$$

der Oberfläche berechnet.

Dieser dient später im Zusammenhang mit einer erweiterten oberflächenorientierten Mehrschichten-Schalentheorie als Grundlage zur Ermittlung einer Kontakt-Normal- und Kontakt-Tangential-Spannung, vgl. die Abschnitte 4.4.2 und 4.4.3.

### 2.5.5 Vergleich der Spannungsmaße am Beispiel

Die in (2.82) eingeführten CAUCHY- und in (2.87) eingeführten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsmaßzahlen sollen hinsichtlich ihrer physikalischen Interpretierbarkeit durch die folgende Veranschaulichung an einer beispielhaft gewählten speziellen Deformation eines einfachen, ebenen Schalenkörpers miteinander verglichen werden, der in Abb. 2.7 dargestellt ist. Die physi-

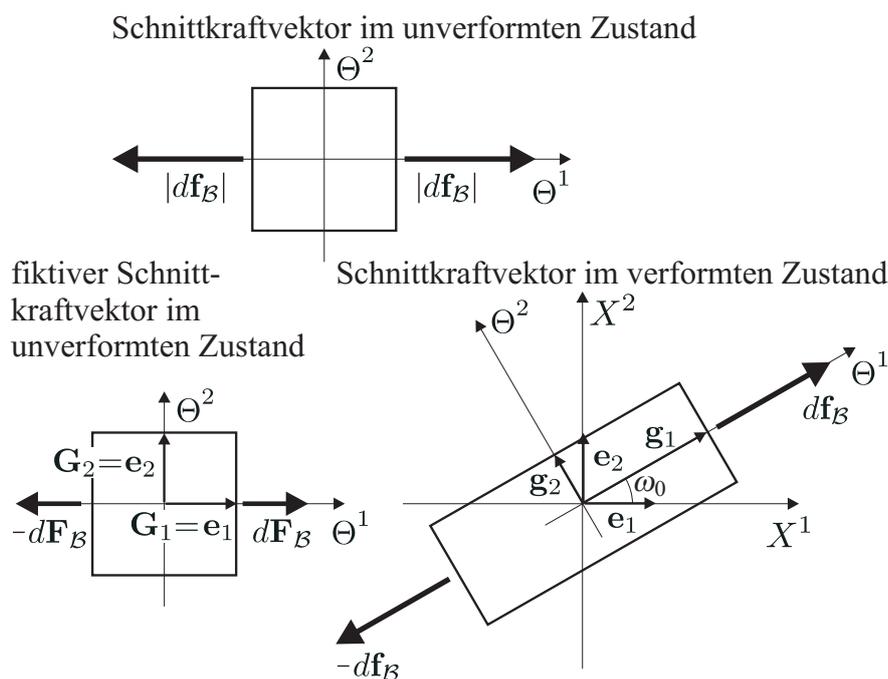


Abbildung 2.7: Darstellung der Schnittkräfte  $df_B$  und  $dF_B$  in unterschiedlichen Konfigurationen

kalischen Maßeinheiten für die Längen, Kräfte und Spannungswerte sollen jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht mitgeführt werden. Ebenso seien die Gleichgewichtsbeziehungen sowie die konstitutiven Beziehungen und Materialparameter nicht Bestandteil der Betrachtung. Es sind in Abb. 2.7 auf der linken Seite der unverformte Zustand des würfelförmigen Schalenkörpers als Ausgangskonfiguration mit den Kantenlängen  $L_i = 1$  und auf der rechten Seite der verformte Zustand des selben Schalenkörpers als Momentankonfiguration jeweils in der Aufsicht auf die  $X^1, X^2$ -Ebene in dem selben einbettenden kartesischen Koordinatensystem  $X^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) dargestellt. Im unverformten Zustand falle in diesem Beispiel das konvекtive Koordinatensystem  $\Theta^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) des Schalenkörpers mit dem einbettenden kartesischen Koordinatensystem zusammen, so dass für die Basisvektoren des konvекtiven Koordinatensystems in der Ausgangskonfiguration gelte:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}^1 = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}^2 = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{G}^3 = \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

Im verformten Zustand bleibe der in diesem Beispiel betrachtete Schalenkörper der Einfachheit halber quaderförmig, sei jedoch gegenüber der Ausgangskonfiguration durch den Winkel

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{G}_3 \quad (2.116)$$

gegenüber dem Basisvektor  $\mathbf{G}_1$  um die Schalennormale gedreht, vgl. Abb. 2.7. Seine Kantenlängen

$$l_1 = \omega_1 L_1 = \omega_1, \quad l_2 = \omega_2 L_2 = \omega_2 \quad \text{und} \quad l_3 = L_3 = 1 \quad (2.117)$$

sollen sich bei der Deformation um die Faktoren  $\omega_1$  und  $\omega_2$  verändert haben, so dass für die Basisvektoren des konvektiven Koordinatensystems in der Momentankonfiguration gelte:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \omega_1 \begin{bmatrix} \cos \omega_0 \\ \sin \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{g}_2 &= \omega_2 \begin{bmatrix} -\sin \omega_0 \\ \cos \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{g}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}^1 &= \frac{1}{\omega_1} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 \\ \sin \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{g}^2 &= \frac{1}{\omega_2} \begin{bmatrix} -\sin \omega_0 \\ \cos \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{g}^3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Die Maßzahlen  $f^{kl}$  des Deformationsgradienten (2.49) bezüglich des Basissystems des einbettenden kartesischen Koordinatensystems lassen sich allgemein folgendermaßen angeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= f^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^k \\ f^{ij} &= \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{e}^i \mathbf{G}^k \cdot \mathbf{e}^j. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Wegen  $\mathbf{G}^k = \mathbf{e}^k = \mathbf{G}_k = \mathbf{e}_k$  kann für dieses Beispiel der Deformationsgradient durch

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{G}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \begin{bmatrix} \omega_1 \cos \omega_0 & -\omega_2 \sin \omega_0 & 0 \\ \omega_1 \sin \omega_0 & \omega_2 \cos \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.120)$$

seine Determinante durch

$$\det \mathbf{F} = \omega_1 \omega_2 \quad (2.121)$$

und die in (2.50) angegebenen Funktionen des Deformationsgradienten durch

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \omega_1^{-1} \cos \omega_0 & \omega_1^{-1} \sin \omega_0 & 0 \\ -\omega_2^{-1} \sin \omega_0 & \omega_2^{-1} \cos \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{-T} = \begin{bmatrix} \omega_1^{-1} \cos \omega_0 & -\omega_2^{-1} \sin \omega_0 & 0 \\ \omega_1^{-1} \sin \omega_0 & \omega_2^{-1} \cos \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

berechnet werden.

Es wird noch einmal darauf hingewiesen, dass, wie oben vereinbart, hinter der eckigen Klammer, die in diesem Fall Maßzahlen von Tensoren zweiter Stufe einschließt, die zugehörige Basis  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  nicht mitgeschrieben wurde.

Alle notwendigen die Geometrie betreffenden Größen wurden für dieses Beispiel damit festgelegt. Bezüglich der Kraft, die beim Deformationsprozess, der durch die beiden hinsichtlich der

Geometrie beschriebenen Konfigurationen gekennzeichnet ist, am Körper wirkt, sei folgendes angenommen: Der zum Ausgangszustand gehörende fiktive Schnittkraftvektor (2.85) und ein daraus resultierender, die Projektion (2.85) für dieses Beispiel erfüllender 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor (2.87) seien:

$$d\mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.123)$$

Der dem Ausgangszustand zugeordnete fiktive Schnittkraftvektor  $d\mathbf{F}_B$  hat den Betrag  $|d\mathbf{F}_B|$  und weist in Richtung der Flächennormalen der Fläche  $d\mathbf{A}_B$  des Ausgangszustands mit deren Betrag  $|d\mathbf{A}_B|$  mit den Werten

$$|d\mathbf{F}_B| = 1, \quad |d\mathbf{A}_B| = L_2 L_3 = 1. \quad (2.124)$$

Daraus lässt sich ein Rechenwert für die Spannung als 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung

$$S^{11} = \frac{|d\mathbf{F}_B|}{|d\mathbf{A}_B|} = 1 \quad (2.125)$$

im Körper ermitteln.

Soll das gleichzeitige Vorhandensein der Kraft und zugehöriger Deformation in der Momentankonfiguration am verformten Körper der Ermittlung eines Rechenwertes zu Grunde gelegt werden, ist die Verwendung des CAUCHY-Spannungstensors erforderlich. Der zur Momentankonfiguration gehörende, aus (2.84) durch Umformung hervorgehende Schnittkraftvektor

$$d\mathbf{f}_B = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} \omega_1 \cos \omega_0 \\ \omega_1 \sin \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

hat den Betrag

$$|d\mathbf{f}_B| = \omega_1. \quad (2.127)$$

Der Schnittkraftvektor wird also im Vergleich zu  $d\mathbf{F}_B$ , als wäre er dem materiellen Volumen eingeschrieben, mit dem Körper gestreckt. Er weist in Richtung der Flächennormalen der Fläche  $d\mathbf{a}_B$  mit deren Betrag

$$|d\mathbf{a}_B| = l_2 l_3 = \omega_2. \quad (2.128)$$

Aus (2.86) geht durch Umformung der CAUCHY-Spannungstensor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T = \sigma^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = \hat{\sigma}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \hat{\sigma}^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{11} & \hat{\sigma}^{12} & \hat{\sigma}^{13} \\ \hat{\sigma}^{21} & \hat{\sigma}^{22} & \hat{\sigma}^{23} \\ \hat{\sigma}^{31} & \hat{\sigma}^{32} & \hat{\sigma}^{33} \end{bmatrix} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \begin{bmatrix} \cos^2 \omega_0 & \cos \omega_0 \sin \omega_0 & 0 \\ \cos \omega_0 \sin \omega_0 & \sin^2 \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.129)$$

hervor, der sich durch Transformation mit der Transformationsmatrix

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{g}^1 & \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{g}^1 & \mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{g}^2 & \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{g}^2 & \mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{g}^3 & \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{g}^3 & \mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{g}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^{-1} \cos \omega_0 & \omega_1^{-1} \sin \omega_0 & 0 \\ -\omega_2^{-1} \sin \omega_0 & \omega_2^{-1} \cos \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

in das Basissystem des verformten Körpers mit den Maßzahlen

$$\sigma^{kl} = \hat{\sigma}^{ij} \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{g}^k \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{g}^l \quad (2.131)$$

zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ \hat{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{11} & \hat{\sigma}^{12} & \hat{\sigma}^{13} \\ \hat{\sigma}^{21} & \hat{\sigma}^{22} & \hat{\sigma}^{23} \\ \hat{\sigma}^{31} & \hat{\sigma}^{32} & \hat{\sigma}^{33} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}^T \right]_{\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j} = \begin{bmatrix} (\omega_1 \omega_2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j} \quad (2.132)$$

ergibt. Man erkennt an dieser Stelle, dass, wie in (2.88) angegeben, sich die Spannungsmaßzahlen

$$\sigma^{11} = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} = \frac{S^{11}}{\det \mathbf{F}} \quad (2.133)$$

um  $\det \mathbf{F}$ , vgl. (2.121), unterscheiden. Zudem ist zu erkennen, dass in der Darstellung (2.132) das Spannungsmaß  $\sigma^{11}$  nicht vom Drehwinkel  $\omega_0$  abhängig ist.

Um für den erhaltenen CAUCHY-Spannungszustand dieses Beispiels einen zu (2.125) vergleichbaren Rechenwert einer Spannung zu erhalten, soll abschließend der CAUCHY-Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = \tilde{\sigma}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \tilde{\sigma}^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \tilde{\sigma}^{ij} \tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}_j \quad (2.134)$$

noch im normierten Basissystem

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_i &= \tilde{\mathbf{g}}^i = \frac{\mathbf{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{\mathbf{g}_i}{|\mathbf{g}_i|} \\ \tilde{\mathbf{g}}^1 &= \begin{bmatrix} \cos \omega_0 \\ \sin \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}^2 = \begin{bmatrix} -\sin \omega_0 \\ \cos \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.135)$$

des verformten Zustands, das in diesem Beispiel bereits ein orthogonales Basissystem ist, dargestellt werden. Es entstehen aus (2.134) die Maßzahlen

$$\tilde{\sigma}^{kl} = \hat{\sigma}^{ij} \mathbf{G}_i \cdot \tilde{\mathbf{g}}^k \mathbf{G}_j \cdot \tilde{\mathbf{g}}^l, \quad (2.136)$$

womit durch Transformation mit der Transformationsmatrix

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \cdot \tilde{\mathbf{g}}^1 & \mathbf{G}_2 \cdot \tilde{\mathbf{g}}^1 & \mathbf{G}_3 \cdot \tilde{\mathbf{g}}^1 \\ \mathbf{G}_1 \cdot \tilde{\mathbf{g}}^2 & \mathbf{G}_2 \cdot \tilde{\mathbf{g}}^2 & \mathbf{G}_3 \cdot \tilde{\mathbf{g}}^2 \\ \mathbf{G}_1 \cdot \tilde{\mathbf{g}}^3 & \mathbf{G}_2 \cdot \tilde{\mathbf{g}}^3 & \mathbf{G}_3 \cdot \tilde{\mathbf{g}}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 & \sin \omega_0 & 0 \\ -\sin \omega_0 & \cos \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

der CAUCHY-Spannungstensor in die Darstellung

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ \tilde{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{11} & \hat{\sigma}^{12} & \hat{\sigma}^{13} \\ \hat{\sigma}^{21} & \hat{\sigma}^{22} & \hat{\sigma}^{23} \\ \hat{\sigma}^{31} & \hat{\sigma}^{32} & \hat{\sigma}^{33} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^T \right]_{\tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}_j} = \begin{bmatrix} \omega_1 \omega_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}_j} \quad (2.138)$$

gebracht werden kann. Man erhält also sowohl anschaulich aus (2.127) und (2.128) als auch als Ergebnis (2.138) der Spannungstransformationen die CAUCHY-Spannung

$$\tilde{\sigma}^{11} = \frac{|d\mathbf{f}_B|}{|d\mathbf{a}_B|} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (2.139)$$

was sich von der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung (2.125) offensichtlich unterscheidet. Im Vergleich zu (2.138) erhält man aus (2.123) für die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen

$$\mathbf{S} = \left[ \tilde{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^T \right]_{\tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}_j} = \begin{bmatrix} \cos^2 \omega_0 & -\cos \omega_0 \sin \omega_0 & 0 \\ -\cos \omega_0 \sin \omega_0 & \sin^2 \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{\mathbf{g}}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}_j} . \quad (2.140)$$

Die Maßzahlen des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors (2.123) und (2.140) und des CAUCHY-Spannungstensors (2.129) und (2.138) lassen sich insofern physikalisch interpretieren, als dass sie alle, hier vereinbarungsgemäß dimensionslos, bezüglich orthogonaler, normierter Basissysteme angegeben sind. Sie können in diesem Sinne physikalische Spannungsmaße bezüglich vorher vereinbarter Kraft- und Längeneinheiten darstellen. Der physikalisch messbare Zustand wird am geeignetsten durch die Darstellung (2.138) des CAUCHY-Spannungstensors beschrieben. Eine dem Ingenieur ebenfalls vertraute Methode ist die Berechnung des Betrages einer Spannung

$$\sigma_1 = \frac{|d\mathbf{f}_B|}{|d\mathbf{A}_B|} \quad (2.141)$$

aus dem Betrag des Schnittkraftvektors im verformten Zustand bezogen auf eine Fläche im unverformten Zustand, vgl. Abb. 2.7 oben. Nimmt man zur abschließenden Veranschaulichung beispielsweise für  $\omega_1 = 2,0$  und  $\omega_2 = 0,8$  an, ergeben sich die Beträge der CAUCHY-Spannung (2.139), der Spannung (2.141) und der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung (2.125) der Reihenfolge nach zu

$$\tilde{\sigma}^{11} = 2,5 \quad , \quad \sigma_1 = 2,0 \quad , \quad S^{11} = 1,0 \quad . \quad (2.142)$$

Da die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen als energiekonjugierte Größen zu den GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungen aus der späteren Berechnung direkt hervorgehen, ist zur Berechnung der CAUCHY-Spannungen eine Nachlaufrechnung in den Punkten  $p$  des Schalenkörpers bzw.  ${}_0p$  der Schalenreferenzfläche erforderlich. Derart große Verzerrungen, wie sie in Abb. 2.7 dargestellt sind, sind bei der hier vorgesehenen Anwendung im Zusammenhang mit dem Material Beton nicht zu erwarten, so dass sich die physikalischen Spannungsmaße der beiden Spannungen bei den hier vorausgesetzten kleinen Verzerrungen in der praktischen Rechnung nur wenig voneinander unterscheiden. Man vergleiche dazu die Abbildungen 3.14(a) und 3.14(b) des numerischen Beispiels in Abschnitt 3.5.1, in denen an einem stark verformten Kragbalken jeweils Hauptspannungen, berechnet aus dem 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor bzw. aus dem CAUCHY-Spannungstensor, in Größe und Richtung dargestellt wurden. Darin ist zu erkennen, dass die physikalischen 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen bezüglich der Lage des Balkens im unverformten Zustand, nämlich entlang der Horizontalen, geeignete Rechenwerte liefern, wenn man deren Richtungen mit den bei dieser Belastung an dem Balken zu erwartenden Spannungstrajektorien vergleicht. Die physikalischen CAUCHY-Spannungen liefern bezüglich der Lage des Balkens im verformten Zustand geeignete Rechenwerte. Für in der Praxis zu erwartende Belastungen von Textilbeton ergeben sich die Spannungen aus (2.142) zu  $\tilde{\sigma}^{11} = 7,0003 \text{ N/mm}^2$  und  $S^{11} = 6,9986 \text{ N/mm}^2$ , wenn man einmal eine elastische Grenzzugspannung  $\sigma_1 = 7,0000 \text{ N/mm}^2$ , die für eine Dehnung von etwa 0,0002 in einaxialen Versuchen ungefähr gemessen werden kann, zu Grunde legt und dann für  $\omega_1 = 1,0002$  und  $\omega_2 = 0,99996$  wählt. Im Rahmen dieser Arbeit werden physikalische Spannungsmaße auf der Grundlage des CAUCHY-Spannungstensors, wie sie in (2.106) und in (2.113) zur Berechnung des Spannungsvektors der Oberfläche (2.114) angegeben

werden, als Vergleichswerte für die experimentell ermittelten materialspezifischen Versagensspannungen verwendet. Die zugehörigen Basissysteme der verwendeten Spannungsmaße orientieren sich an der ersten Materialhaupttrichtung des später einzuführenden orthotropen Materials im verformten Zustand der Schale.

## 2.6 Materialgesetz

Hinsichtlich des in dieser Arbeit eingeführten Materialgesetzes soll nur eine sehr einfache Näherung für das tatsächliche Materialverhalten von textilbewehrten Materialien verwendet werden, da ein Schwerpunkt der Arbeit neben der Entwicklung des Schalenmodells in der kinematischen und kinetischen Beschreibung lediglich des speziellen Versagensmechanismus Delamination liegt.

### 2.6.1 Anforderungen an Stoffgesetze

Durch die Erhaltungssätze in Abschnitt 1.2.3 kann nicht erfasst werden, dass gleiche äußere Einwirkungen auf einen materiellen Körper zu unterschiedlichen Spannungs- und Deformationszuständen in materiellen Körpern gleicher Geometrie, aber unterschiedlichen Materials führen. Dazu wurden sogenannte Axiome der Materialtheorie formuliert, deren Berücksichtigung einen physikalisch sinnvollen Aufbau der Stoffgesetze gewährleistet, vgl. [ERINGEN 1980], [BUCHER 2001].

**Axiom des Determinismus.** Alle abhängigen konstitutiven Variablen sind eindeutig bestimmbar durch die Geschichte der unabhängigen konstitutiven Variablen im materiellen Körper.

**Axiom der lokalen Wirkung.** Die konstitutiven Variablen eines materiellen Teilchens werden nur von Punkten beeinflusst, die sich in einer genügend kleinen Umgebung des betrachteten Teilchens befinden.

**Axiom der Äquipräsenz.** Jede abhängige konstitutive Variable ist mit allen unabhängigen konstitutiven Variablen verknüpft.

**Axiom der thermodynamischen Konsistenz.** Alle Stoffgesetze müssen dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik genügen.

**Axiom der Objektivität.** Bei der Formulierung von Deformationsgesetzen ist es erforderlich, deren Unabhängigkeit vom gewählten Bezugssystem zu gewährleisten, was durch die Verwendung von tensorwertigen Beziehungen erreicht wird.

### 2.6.2 Textilbewehrte Verstärkungen

Textilbewehrte Verstärkungsschichten eignen sich wegen der guten Drapierbarkeit der Bewehrung sehr gut zum nachträglichen Verstärken von gekrümmten Bauteilen, insbesondere von Schalenkonstruktionen. In Abb. 2.8(a) ist das Aufbringen von Gelegen für eine Textilbetonverstärkung auf ein Bauteil aus Beton dargestellt, auf das anschließend sogenannter Feinbeton aufgebracht wird. Eine weitere Möglichkeit des Einsatzes textilbewehrter Verstärkungsschichten ist das Aufbringen von in Harz eingebetteten textilen Strukturen auf Holzbauteile. Die Bewehrung besteht jeweils aus einer oder mehreren textilen Gelegen übereinander, vgl. Abb. 2.8(b), welche aus sogenannten Glasfaserrovings maschinell hergestellt werden. Der Roving<sup>1</sup> selbst besteht aus einer Vielzahl von Filamenten<sup>2</sup> (bis zu 2000 Einzelfilamente). Auf Grund der Verwendung von Glas als Bewehrungsmaterial kann bei Verstärkungen mit Beton die konstruktive Betonüberdeckung im Vergleich zu Stahlbeton verringert werden. Mit textilbewehrten Verstärkungen lassen sich somit sehr filigrane Bauteile bzw. dünne Verstärkungsschichten herstellen. Die zementgebundene Matrix des Textilbetons bietet sich zudem zur Verstärkung bestehender Betonkonstruktionen an, da kein Klebstoff

<sup>1</sup> nicht verdrehtes Filamentbündel

<sup>2</sup> Endlosfasern

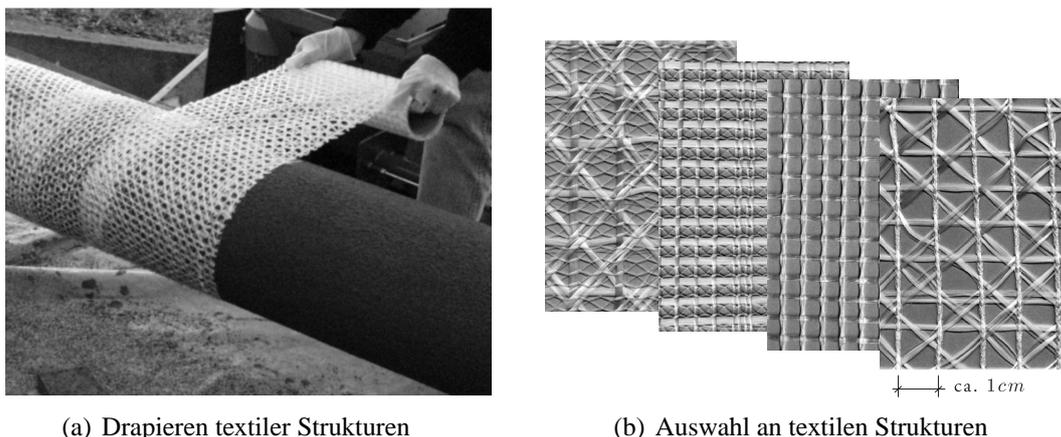


Abbildung 2.8: Applikation und textile Bewehrungsstrukturen

zwischen Bauteil und Verstärkungsschicht notwendig ist.

Die aus einzelnen übereinander gelegten Gelegen bestehende textile Gesamtstruktur ist im Allgemeinen monotrop, vgl. Abb. 2.9(f), d. h. innerhalb der Gelegefläche anisotrop. Ein einzelnes Gelege, bestehend aus Kett- und Schussfäden ist im Allgemeinen orthotrop. Es gibt jedoch beim Einsatz von zwei oder drei Gelegen übereinander Anordnungen hinsichtlich des Winkels zwischen den Materialhaupttrichtungen, die wiederum orthotrope Materialeigenschaften aufweisen. Zur Darstellung der Materialeigenschaften möglicher Bewehrungsschichten in Abb. 2.9 seien unterschiedliche, einzelne Gelege  $a$  und  $b$ , jeweils bestehend nur aus Kettfäden, vgl. Abb. 2.9(a), eingeführt. Die Schussfäden seien in  $a$  und  $b$  nur zur Gewährleistung der Formtreue des Geleges vorhanden und nicht für eine Kraftübertragung anrechenbar. Aus dieser Abbildung ist die Charakterisierung des zugehörigen Materialverhaltens zu entnehmen, das aus einer Homogenisierung der jeweils dargestellten textilen Struktur zusammen mit dem sie umgebenden bzw. durchdringenden Feinbeton hervorgeht. In der Arbeit [RICHTER 2005] werden Materialgesetze für homogenisiertes Material für eine beliebige Anzahl von Gelegen in beliebigen Winkeln zueinander angegeben, die auch Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Lagen berücksichtigen.

### 2.6.3 Materialgesetz – lineares orthotropes Material

Auf der Grundlage der gewählten Kinematik ist es uneingeschränkt möglich, dreidimensionale Materialgesetze, die auf dem GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor (2.52) basieren, zu verwenden. Im Hinblick auf die Anwendung wird unter Berücksichtigung der vorgenannten Einschränkungen, die in dieser Arbeit bezüglich des Materialgesetzes vereinbart wurden, ein linear elastisches, orthotropes Material verwendet. Wenn der inneren Energie ein Potenzial zugrunde liegt und Spannungsfreiheit im unverformten Zustand vorausgesetzt wird, lassen sich die PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen (2.87) durch

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.143)$$

berechnen, worin

$$\mathbf{C} = C_m^{ijkl} \mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}_j \otimes \mathbf{M}_k \otimes \mathbf{M}_l = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \quad (2.144)$$

den Elastizitätstensor, einen Tensor vierter Stufe, darstellt. Die Elemente  $C_m^{ijkl}$  sind Maßzahlen bezüglich des in Abschnitt 2.5.3 eingeführten Basissystems  $\{\mathbf{M}^i = \mathbf{M}_i; i = 1, 2, 3\}$  mit den Basisvektoren  $\mathbf{M}_i$  nach (2.94), (2.98) und (2.91) des normierten orthogonalen Koordinatensystems

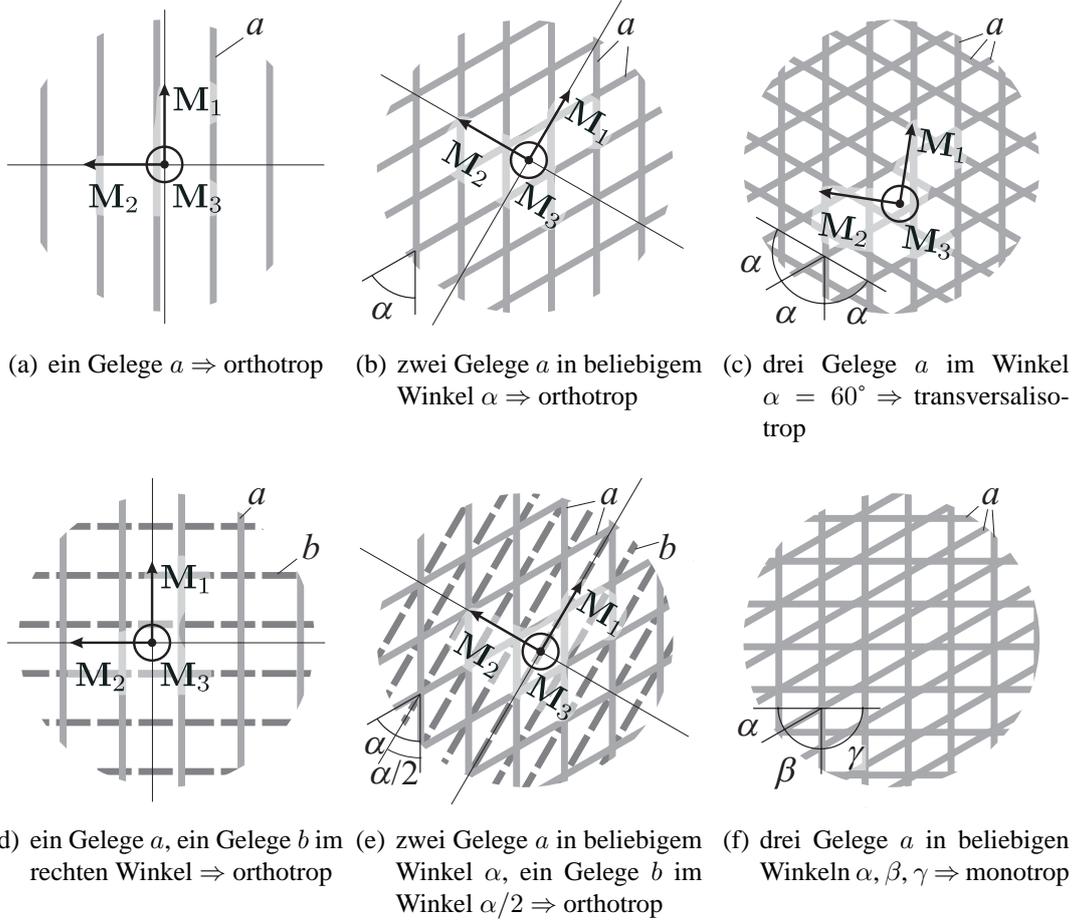


Abbildung 2.9: Symmetrieeigenschaften des Materials als Folge verschiedener Anordnungen von textilen Gelegen

mit den Koordinatenlinien  $\Theta^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), das die Hauptrichtungen des Materialgesetzes angibt. Dabei ist die erste Materialhauptrichtung, die in Richtung des Basisvektors  $\mathbf{M}_1$  verläuft, der gegenüber dem Basisvektor  $\mathbf{G}_1$  um den Winkel  $\omega$  nach (2.92) um die Schalennormale gedreht ist, vgl. Abb. 2.10. Analog zu (2.143) können die in (2.113) eingeführten Spannungen

$$\mathbf{S}_S = \mathbf{C} : \mathbf{E}_S \quad (2.145)$$

der Oberfläche aus den in (2.74) eingeführten Verzerrungen der Oberfläche berechnet werden. Der Elastizitätstensor kann für das lineare orthotrope Material wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & C_m^{1111} \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 + C_m^{2222} \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \\ & + C_m^{3333} \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 + C_m^{1122} \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \\ & + C_m^{2233} \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 + C_m^{3311} \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 \\ & + C_m^{2211} \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 + C_m^{3322} \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \\ & + C_m^{1133} \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 + C_m^{1212} \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 \\ & + C_m^{2323} \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_3 + C_m^{3131} \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_1 \\ & + C_m^{2112} \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + C_m^{3223} \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_3 \\ & + C_m^{1331} \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_1 + C_m^{1221} \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_m^{2332} \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_2 + C_m^{3113} \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_3 \\
& + C_m^{2121} \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1 + C_m^{3232} \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_2 \\
& + C_m^{1313} \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_3 .
\end{aligned} \tag{2.146}$$

Die Maßzahlen  $C_m^{ijkl}$  des Materialtensors des orthotropen Materials werden aus materialspezifischen Konstanten, den Elastizitätsmoduli  $E_1, E_2, E_3$  der Materialhaupttrichtungen, den Schubmoduli  $G_{12} = G_{21}, G_{23} = G_{32}, G_{31} = G_{13}$  und den Querdehnzahlen  $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{31}, \nu_{13}$ , für die

$$\nu_{21} = \nu_{12} E_2 E_1^{-1} \quad , \quad \nu_{32} = \nu_{23} E_3 E_2^{-1} \quad , \quad \nu_{13} = \nu_{31} E_1 E_3^{-1} \tag{2.147}$$

angegeben werden kann, berechnet. Diese Konstanten werden z. B. mit Hilfe von Homogenisierungsmodellen, vgl. [RICHTER 2005], erhalten. Für ein exemplarisch ausgewähltes Gelege, bestehend aus 4 Lagen Einzelgelege mit der Bezeichnung NWM3-020-00, das wiederum jeweils aus Multifilamentgarnen (Faserbündeln) NEG-ARG620-01 im Abstand von  $3,6 \text{ mm}$  in der ersten Materialhaupttrichtung und NEG-ARG310-01 im Abstand von  $7,2 \text{ mm}$  senkrecht zur ersten Materialhaupttrichtung besteht, wurden diese Konstanten in Abschnitt 5.2 entsprechend den für den linear elastischen Bereich entwickelten Regeln zur Homogenisierung angegeben. Die Maßzahlen  $C_m^{ijkl}$  lassen sich mit Hilfe der Konstanten wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
C_m^{1111} &= (1 - \nu_{23}\nu_{32}) E_1 D^{-1} \\
C_m^{2222} &= (1 - \nu_{31}\nu_{13}) E_2 D^{-1} \\
C_m^{3333} &= (1 - \nu_{21}\nu_{12}) E_3 D^{-1} \\
C_m^{1122} &= (\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}) E_2 D^{-1} \\
C_m^{2233} &= (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}) E_3 D^{-1} \\
C_m^{3311} &= (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}) E_3 D^{-1} \\
C_m^{1212} &= G_{12} \quad , \quad C_m^{2323} = G_{23} \quad , \quad C_m^{3131} = G_{31}
\end{aligned} \tag{2.148}$$

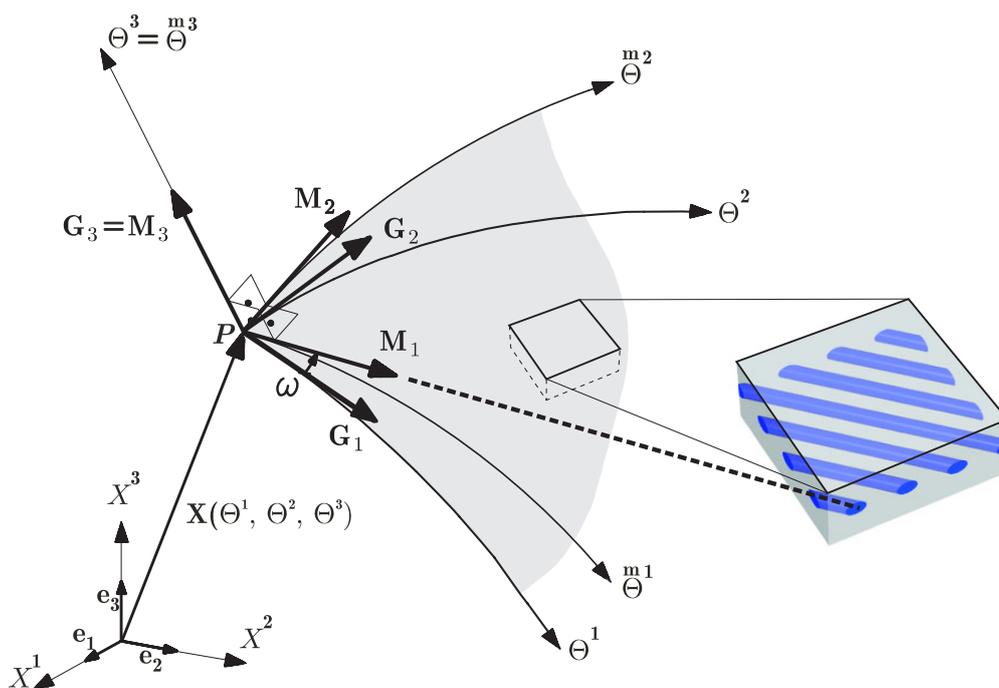


Abbildung 2.10: Definition des lokalen Materialkoordinatensystems

mit

$$D = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32}. \quad (2.149)$$

Um das Materialgesetz in der virtuellen inneren Arbeit verwenden zu können, ist es hilfreich, den Tensor in das Basissystem  $\mathbf{G}_i$  zu transformieren, woraus sich die Maßzahlen

$$C^{mnop} = C_m^{ijkl} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{G}^m \mathbf{M}_j \cdot \mathbf{G}^n \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{G}^o \mathbf{M}_l \cdot \mathbf{G}^p \quad (2.150)$$

ergeben.

## 2.7 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Eine zu den Gleichgewichtsbedingungen an einem materiellen Körper äquivalente Formulierung ist das aus der Impulsbilanz herrührende Prinzip der virtuellen Verschiebungen, vgl. [ECKSTEIN 1999]. Darin wird verlangt, dass die Summe der virtuellen Arbeiten  $\delta W$  aller inneren und äußeren Kraftgrößen eines im Gleichgewicht befindlichen materiellen Körpers mit den zugehörigen virtuellen Weggrößen verschwindet, was in der schwachen Formulierung wie folgt dargestellt wird:

$$\delta W = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\mathcal{S}} {}_0\mathbf{F}_a \cdot \delta {}_0\mathbf{u} dA = 0. \quad (2.151)$$

In (2.151) ist

$$\delta W_i = -\delta \Pi_i = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV \quad (2.152)$$

die virtuelle Arbeit der inneren Kraftgrößen, die für elastisches Materialverhalten, das in dieser Arbeit zu Grunde gelegt wird, als negative Variation der potenziellen Energie  $\Pi_i$  dargestellt werden kann, vgl. [SCHULTZ 1996]. Darin sind  $\delta \mathbf{E}$  die erste Variation des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors, die aus der Richtungsableitung des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors nach den Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , vgl. (2.42) bzw. (2.44), in Richtung der virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  berechnet werden kann, und  $\mathbf{S}$  der in (2.87) bereits eingeführte PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor 2. Art. Des Weiteren ist in (2.151)

$$\delta W_a + \delta {}_0W_a = -\delta \Pi_a = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\mathcal{S}} {}_0\mathbf{F}_a \cdot \delta {}_0\mathbf{u} dA \quad (2.153)$$

die virtuelle Arbeit der äußeren Kraftgrößen, die für konservative Lasten als negative Variation der potenziellen Energie  $\Pi_a$  der äußeren konservativen Kräfte dargestellt werden kann. Dabei sind

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = F_a^i \mathbf{e}_i \quad (2.154)$$

das im Schalenkörper definierte volumenbezogene äußere Lastvektorfeld, das zusammen mit dem Vektorfeld  $\delta \mathbf{u}$  der virtuellen Verschiebungen die virtuelle Arbeit  $\delta W_a$  der äußeren Volumenlasten bildet, und

$${}_0\mathbf{F}_a = {}_0\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2) = {}_0F_a^i \mathbf{e}_i \quad (2.155)$$

das in der Schalenreferenzfläche definierte äußere Lastvektorfeld, das zusammen mit dem Vektorfeld  $\delta {}_0\mathbf{u}$  der virtuellen Verschiebungen in der Referenzfläche die virtuelle Arbeit  $\delta {}_0W_a$  der äußeren

Oberflächenlasten bildet, s. Abb. 2.11. Die virtuellen Verschiebungen müssen zwar geometrisch verträglich und genügend klein sein, sind aber ansonsten beliebig und von Null verschieden.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung von Skalaren, Vektoren und Matrizen, die mit dem äußeren Lastvektorfeld im Zusammenhang stehen, stets durch die nachgestellte einfache untere Indizierung  $\square_a$  mit dem Kennzeichen „a“, das für das Wort „äußere“ steht, erfolgt.

Für das Lastvektorfeld  $\mathbf{F}_a$  wird hier stellvertretend die volumenbezogene Gewichtskraft  $\mathbf{F}_a^m(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$  des Schalenkörpers durch

$$\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \mathbf{F}_a^m(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = -\rho g \mathbf{e}_3 \quad (2.156)$$

in Richtung  $\mathbf{e}_3$  mit  $\rho$  als Dichte und  $g$  als Normalfallbeschleunigung angegeben.

## 2.8 Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte

### 2.8.1 Direktorkräfte

Die dreidimensionale Darstellung (2.42) des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$  des Schalenkörpers ermöglicht eine an zahlreiche Problemstellungen angepasste Beschreibung der Lasteinleitung in die Schale, indem das in (2.154) eingeführte dreidimensionale Lastvektorfeld  $\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$  verwendet wird, s. Abb. 2.11. Es kann auf diese Weise der Ort des Lastangriffs am Schalenkör-

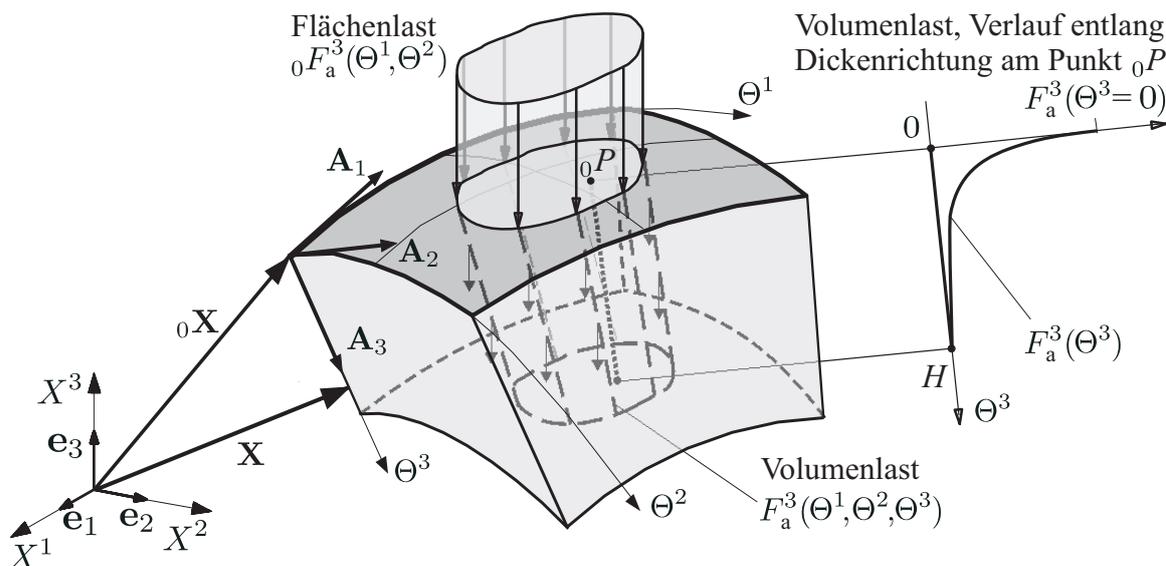


Abbildung 2.11: Beispiel für ein Lastvektorfeld  $\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = F_a^3(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{e}_3$  und eine Oberflächenlast  ${}_0\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2) = {}_0F_a^3(\Theta^1, \Theta^2) \mathbf{e}_3$

per berücksichtigt werden. Diese Möglichkeit ist für den späteren Einsatz des Schalenmodells im Zusammenhang mit Schädigung von Bedeutung. Insbesondere wird es dabei erforderlich werden, Lasten in den Schalenkörper in der der Referenzfläche gegenüberliegenden Schalenoberfläche einzutragen, wenn nämlich dieser Schalenkörper eine Schicht eines Mehrschichten-Schalenelementes darstellt und an die genannte Oberfläche die Referenzfläche einer weiteren Schicht über mechanischen Kontakt mit der ersten in Verbindung steht.

Um zu einer für eine Flächentragwerkstheorie charakteristischen Darstellung der Belastung, die auf die Schalenreferenzfläche bezogen ist, zu gelangen, werden zu den Verschiebungen

${}_l\mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2)$  der Direktoren, vgl. (2.43), im Sinne des Arbeitsausdrucks (2.153) konjugierte äußere Kraftgrößen  ${}_l\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2)$  eingeführt, die im Folgenden für  $l > 0$  als Direktorkräfte bezeichnet werden. Mit deren Hilfe können verschiedene Typen des Lastvektorfeldes  $\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$  hinsichtlich der Verteilung in Schalendickenrichtung approximiert werden. Dabei gilt, je mehr Direktoren verwendet werden, desto besser ist für ein beliebig gewähltes Lastvektorfeld deren Approximation in Schalendickenrichtung. Der Verlauf eines Lastvektorfeldes in Schalendickenrichtung bei Verwendung von nur einem Direktor z. B. muss durch Superposition von Vielfachen der beiden Funktionen in Abb. 2.13 a) approximiert werden.

Dazu wird im ersten Integral in der virtuellen Arbeit (2.153) der äußeren Kraftgrößen die Integration über die Schalendicke  $H$  vorweggenommen. Mit (2.25) kann die tatsächliche (physikalische) Länge eines differentiellen Bogenelementes  $dS_B^3$  entlang der  $\Theta^3$ -Linie innerhalb des unverformten Schalenkörpers  $\mathcal{B}$  durch

$$dS_B^3 = \sqrt{G_{33}} d\Theta^3 = d\Theta^3 \quad (2.157)$$

berechnet werden, wobei  $G_{33} = 1$ , da mit (2.7) der Basisvektor in Richtung der Schalenormalen im Schalenraum normiert wird, vgl. (2.28). Damit geht (2.153) mit dem differentiellen Volumen (2.31) des Schalenkörpers und dem differentiellen Flächenelement (2.10) der Schalenreferenzfläche über in

$$\begin{aligned} \delta W_a &= \iiint_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{u} \mu \sqrt{A} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \\ &= \iint_S \int_H \mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \cdot \delta \mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mu d\Theta^3 dA, \end{aligned} \quad (2.158)$$

was durch Approximation mittels der noch zu bestimmenden Direktorkräfte und Oberflächenlasten auch durch

$$\delta W_a = \iint_S \sum_{l=0}^{\infty} ({}_l\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2) \cdot \delta {}_l\mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2)) dA \quad (2.159)$$

geschrieben werden können soll. Setzt man in (2.158) die virtuellen Verschiebungen

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{\infty} ({}_l\Omega(\Theta^3) \delta {}_l\mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2)), \quad (2.160)$$

die analog zur Kinematik (2.42) gebildet werden, ein und nimmt die Integration über die Schalendicke an jedem Punkt  ${}_0P$  in der Schalenreferenzfläche vorweg, d. h., spaltet die Dickenintegrale in (2.158) und (2.159) ab und fordert bereits für diese die Gleichheit, entsteht die Formulierung

$$\int_H \mathbf{F}_a \cdot \left( \sum_{l=0}^{\infty} ({}_l\Omega \delta {}_l\mathbf{u}) \right) \mu d\Theta^3 = \sum_{l=0}^{\infty} ({}_l\mathbf{F}_a \cdot \delta {}_l\mathbf{u}), \quad (2.161)$$

die schließlich zur Identifikation der Direktorkräfte  ${}_l\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2)$  führt.

Um zu einer übersichtlichen Darstellung der Direktorkräfte zu gelangen, wird insbesondere wegen der Summe über die Anzahl der Glieder des Reihenansatzes für das Verschiebungsfeld auf die matrizielle Schreibweise bei Verwendung des endlichen Reihenansatzes (2.44) übergegangen. Dazu wird das Kraftvektorfeld

$$\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = [ F_a^1 \quad F_a^2 \quad F_a^3 ]_{\mathbf{e}_i}^T = [ F_a^1 \quad F_a^2 \quad F_a^3 ]^T \quad (2.162)$$

durch seine Maßzahlen, vgl. (2.154), bezüglich der Basisvektoren des einbettenden kartesischen Koordinatensystems als Matrix durch die vereinbarte Notation dargestellt. Des Weiteren werden der Spaltenvektor der virtuellen Verschiebungen der Direktoren

$$\delta \underline{\mathbf{u}} = [ \delta_0 \mathbf{u}^T \quad \delta_1 \mathbf{u}^T \quad \delta_2 \mathbf{u}^T \quad \delta_3 \mathbf{u}^T \quad \dots \quad \delta_d \mathbf{u}^T ]^T, \quad (2.163)$$

der Spaltenvektor der Basisfunktionen (2.17)

$$\underline{\Omega} = [ {}_0\Omega \quad {}_1\Omega \quad {}_2\Omega \quad {}_3\Omega \quad \dots \quad {}_d\Omega ]^T = [ 1 \quad \Theta^3 \quad (\Theta^3)^2 \quad (\Theta^3)^3 \quad \dots \quad (\Theta^3)^d ]^T \quad (2.164)$$

und der Spaltenvektor der Direktorkräfte

$$\underline{\mathbf{F}}_a = [ {}_0\mathbf{F}_a^T \quad {}_1\mathbf{F}_a^T \quad {}_2\mathbf{F}_a^T \quad {}_3\mathbf{F}_a^T \quad \dots \quad {}_d\mathbf{F}_a^T ]^T \quad (2.165)$$

eingeführt. In letzterem ist die erste Position mit der in der Approximation verwendeten Oberflächenlast besetzt. Mit den eingeführten Größen lässt sich (2.161) wie folgt darstellen:

$$\int_H \delta \underline{\mathbf{u}}^T [ \underline{\Omega} \otimes \mathbf{1} ] \cdot \mathbf{F}_a \mu d\Theta^3 = \delta \underline{\mathbf{u}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}}_a, \quad (2.166)$$

wobei  $\mathbf{1}$  die  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix ist, die hier im KRONECKER-Produkt zweier Matrizen verwendet wird, vgl. [BRONSTEIN et al. 1999]. Die virtuellen Direktorverschiebungen  $\delta \underline{\mathbf{u}}^T$  sind nicht von der Dickenkoordinate abhängig, lassen sich so aus dem Integral herausziehen und damit gänzlich eliminieren. Es ergibt sich damit der Spaltenvektor der Direktorkräfte zu

$$\underline{\mathbf{F}}_a = \int_H \underline{\Omega} \otimes \mathbf{F}_a \mu d\Theta^3 \quad (2.167)$$

mit den Elementen

$${}_i\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2) = \int_H {}_i\Omega(\Theta^3) \mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mu(\Theta^3) d\Theta^3. \quad (2.168)$$

## 2.8.2 Lasttypen – Häufig auftretende Belastungsfunktionen

Auf der Grundlage der Gleichung (2.167) zur Bestimmung des Spaltenvektors der Direktorkräfte werden im folgenden Abschnitt typische Verteilungen von Lastfeldern über die Schalendicke behandelt. Um eine von der Geometrie der Schale weitestgehend unabhängige Darstellung von Belastungstypen zu erhalten, ist folgende Vereinfachung zu treffen. In (2.32) ist zu erkennen, dass  $\mu(\Theta^3) \approx 1$  ist, wenn die mittlere und die GAUSSsche Krümmung der Schale sehr klein sind. Das heißt, wenn der kleinste Krümmungsradius  $\min(R(\Theta^1, \Theta^2))$  innerhalb des Belastungsgebietes gegenüber dem Wertebereich von  $\Theta^3$  in (2.167), also der Schalendicke  $H$ , sehr groß ist, kann  $\mu$  bei der Integration unberücksichtigt bleiben, was nachfolgend vorausgesetzt wird. Zudem mögen die energetisch konjugierten Direktorkräfte speziell für drei Direktoren, also für eine Approximation des Verschiebungsfeldes (2.47) bei Reihenabbruch nach dem vierten Glied ( $d = 3$ ) angegeben werden. Damit geht (2.167) für den Punkt  ${}_0P(\Theta^1, \Theta^2)$  der unverformten Schalenreferenzfläche über in den Spaltenvektor

$$\underline{\mathbf{F}}_a^* = \int_H \underline{\Omega} \otimes \mathbf{F}_a d\Theta^3 \quad (2.169)$$

mit dessen Elementen

$${}_l\mathbf{F}_a^*(\Theta^1, \Theta^2) = \int_H {}_l\Omega(\Theta^3) \mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) d\Theta^3. \quad (2.170)$$

### Lastkonzentration nahe der Referenzfläche.

Für die über die Schalenhöhe veränderliche volumenbezogene Last entlang der  $\Theta^3$ -Linie sei

$$\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \mathbf{F}_a^0 = \frac{p^*}{H^k} (H - \Theta^3)^k \mathbf{e}_i = \frac{P^* (k+1)}{H^{k+1}} (H - \Theta^3)^k \mathbf{e}_i, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.171)$$

in Richtung des Basisvektors  $\mathbf{e}_i$  des einbettenden kartesischen Koordinatensystems angenommen, s. Abb. 2.12(a). Mit steigendem Exponenten  $k$  konzentriert sich dabei die Intensität der Belastung zunehmend in der Referenzfläche, wobei

$$P^*(\Theta^1, \Theta^2) = \int_H \frac{p^* \cdot (\Theta^3)^k}{H^k} d\Theta^3 = \frac{p^* H}{k+1} \quad (2.172)$$

die Größe der resultierenden Flächenlast der über die Höhe verteilten volumenbezogenen Last und  $p^*(\Theta^1, \Theta^2)$  der Wert der volumenbezogenen Last in Höhe der Referenzfläche ist. Es beträgt für

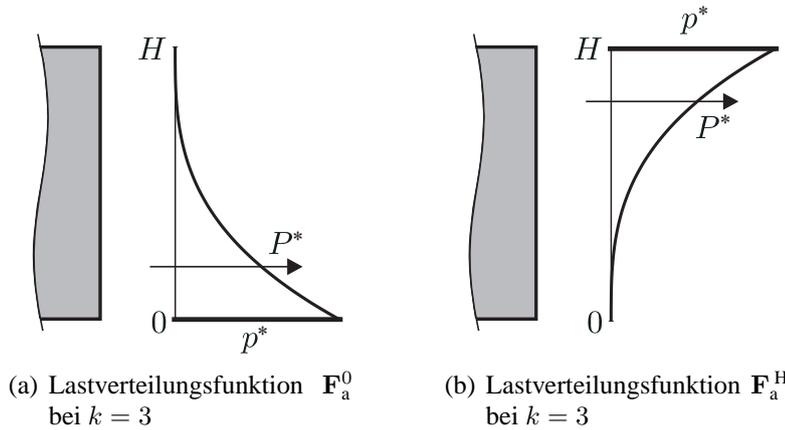


Abbildung 2.12: Lastverteilungen über die Schalendicke im Punkt  ${}_0P$  der Schalenreferenzfläche

diese Kraftverteilung der Vektor der zu den Verschiebungen der Direktoren konjugierten äußeren Kräfte für einen auf vier Funktionen beschränkten Vektor  $\underline{\Omega}$

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*0} = \int_H \frac{p^*}{H^k} (H - \Theta^3)^k \begin{bmatrix} 1 \\ \Theta^3 \\ (\Theta^3)^2 \\ (\Theta^3)^3 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{e}_i d\Theta^3 \quad (2.173)$$

$$= \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{F}_a^* \\ {}_1\mathbf{F}_a^* \\ {}_2\mathbf{F}_a^* \\ {}_3\mathbf{F}_a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^* \\ (k+2)^{-1} H P^* \\ 2((k+2)(k+3))^{-1} H^2 P^* \\ 6((k+2)(k+3)(k+4))^{-1} H^3 P^* \end{bmatrix} \otimes \mathbf{e}_i. \quad (2.174)$$

Bildet man den Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{F}}_a^{*0} = [P^* \ 0 \ 0 \ 0]^T \otimes \mathbf{e}_i, \quad (2.175)$$

erhält man den Vektor der Direktorkräfte, der zu einer in der Referenzfläche wirkenden Flächenlast  ${}_0\mathbf{F}_a = P^* \mathbf{e}_i$  gehört. Darin ist nur die Position für die Oberflächenlast belegt, vgl. (2.165). Die Direktorkräfte verschwinden in diesem Fall, da keine Approximation über das Schalenvolumen erforderlich wird. Für  $k = 1$  ergeben sich die Direktorkräfte

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*0d} = \left[ P^* \quad \frac{1}{3}HP^* \quad \frac{1}{6}H^2P^* \quad \frac{1}{10}H^3P^* \right]^T \otimes \mathbf{e}_i \quad (2.176)$$

für eine Dreieckslast mit dem Wert  $p^*$  in der Referenzfläche, was in Abb. 2.12(a) einem linearen Verlauf der Lastverteilung über die Schalendicke entspricht.

### Lastkonzentration nahe der der Referenzfläche gegenüberliegenden Oberfläche.

Für die über die Schalenhöhe veränderliche volumenbezogene Last entlang der  $\Theta^3$ -Linie sei

$$\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \mathbf{F}_a^H = \frac{p^*}{H^k} (\Theta^3)^k \mathbf{e}_i = \frac{P^* (k+1)}{H^{k+1}} (\Theta^3)^k \mathbf{e}_i, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.177)$$

in Richtung des Basisvektors  $\mathbf{e}_i$  des einbettenden kartesischen Koordinatensystems angenommen, s. Abb. 2.12(b). Mit steigendem Exponenten  $k$  konzentriert sich dabei die Last zunehmend in der der Referenzfläche gegenüberliegenden Schalenoberfläche, wobei die Größe der resultierenden Flächenlast  $P^*$  ( $\Theta^1, \Theta^2$ ) der über die Höhe verteilten volumenbezogenen Last Gleichung (2.172) entnommen werden kann und  $p^*$  ( $\Theta^1, \Theta^2$ ) der Wert der volumenbezogenen Last in Höhe der der Referenzfläche gegenüberliegenden Schalenoberfläche ist. Es beträgt für diese Kraftverteilung der Vektor der zu den Verschiebungen der Direktoren konjugierten äußeren Kräfte für einen wieder auf vier Funktionen beschränkten Vektor  $\underline{\Omega}$

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*H} = \int_H \frac{p^*}{H^k} (\Theta^3)^k \begin{bmatrix} 1 \\ \Theta^3 \\ (\Theta^3)^2 \\ (\Theta^3)^3 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{e}_i d\Theta^3 \quad (2.178)$$

$$= \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{F}_a^* \\ {}_1\mathbf{F}_a^* \\ {}_2\mathbf{F}_a^* \\ {}_3\mathbf{F}_a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^* \\ (k+1)(k+2)^{-1}HP^* \\ (k+1)(k+3)^{-1}H^2P^* \\ (k+1)(k+4)^{-1}H^3P^* \end{bmatrix} \otimes \mathbf{e}_i. \quad (2.179)$$

Bildet man den Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{F}}_a^{*H} = \left[ P^* \quad HP^* \quad H^2P^* \quad H^3P^* \right]^T \otimes \mathbf{e}_i, \quad (2.180)$$

erhält man den Vektor der Direktorkräfte, der zur Approximation einer in der der Referenzfläche gegenüberliegenden Schalenoberfläche wirkenden Flächenlast  $P^*$  gehört. Diese Last wird damit durch eine in der Referenzfläche eingetragene Oberflächenlast  $P^*$  und Direktorkräften approximiert, vgl. (2.165). Für  $k = 1$  ergeben sich die Direktorkräfte

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*Hd} = \left[ P^* \quad \frac{2}{3}HP^* \quad \frac{2}{4}H^2P^* \quad \frac{2}{5}H^3P^* \right]^T \otimes \mathbf{e}_i \quad (2.181)$$

für eine Dreieckslast mit dem Wert  $p^*$  in der der Referenzfläche gegenüberliegenden Schalenoberfläche. Für  $k = 0$  ergeben sich die Direktorkräfte  $\underline{\mathbf{F}}_a^{*k}$  nach (2.182).

### Approximation einer konstanten Volumenlast.

Für  $k = 0$  in (2.171) bzw. (2.177) ergeben sich die Direktorkräfte

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*k} = \left[ P^* \quad \frac{1}{2}HP^* \quad \frac{1}{3}H^2P^* \quad \frac{1}{4}H^3P^* \right]^T \otimes \mathbf{e}_i \quad (2.182)$$

für eine konstant über die Dicke verteilte Volumenlast mit dem Wert  $p^*$ . Wird zur Berechnung von (2.182)  $p^* = -\rho g$  gewählt und wirkt die konstante Volumenlast  $\mathbf{F}_a(\Theta^3) = -\rho g \mathbf{e}_3$  in Richtung  $\mathbf{e}_3$ , dann gibt

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*m} = \left[ -H\rho g \quad -\frac{1}{2}H^2\rho g \quad -\frac{1}{3}H^3\rho g \quad -\frac{1}{4}H^4\rho g \right]^T \otimes \mathbf{e}_3 \quad (2.183)$$

den Spaltenvektor der Direktorkräfte im Punkt  ${}_0P(\Theta^1, \Theta^2)$  der Referenzfläche für die volumenbezogene Gewichtskraft  $\mathbf{F}_a^m$  des Schalenkörpers nach Gleichung (2.156) an.

### 2.8.3 Lasttypen – Vorgabe von Elementen des Spaltenvektors der Direktorkräfte

Auf der Grundlage der Gleichung (2.169) zur Bestimmung des Spaltenvektors der Direktorkräfte, deren Verwendung die in Abschnitt 2.8.2 angeführten Bedingungen voraussetzt, wird im Folgenden der Verlauf der Belastungsfunktion über die Dickenrichtung der Schale untersucht, der bei Vorgabe der Oberflächenlast bzw. einzelner Direktorkräfte (2.170) innerhalb des Spaltenvektors der Direktorkräfte durch die in (2.159) eingeführte Approximation der Volumenlasten abgebildet wird. Betrachtet wird dabei wiederum der Verlauf der Belastungsfunktion entlang der  $\Theta^3$ -Linie im Punkt  ${}_0P(\Theta^1, \Theta^2)$  der unverformten Schalenreferenzfläche. Das Lastvektorfeld

$$\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \mathbf{F}_a^A = \left( a_3 (\Theta^3)^3 + a_2 (\Theta^3)^2 + a_1 \Theta^3 + a_0 \right) \mathbf{e}_i \quad (2.184)$$

für die über die Schalenhöhe veränderliche volumenbezogene Last entlang der  $\Theta^3$ -Linie wird zunächst durch eine Funktion 3. Grades in Richtung des Basisvektors  $\mathbf{e}_i$  des einbettenden kartesischen Koordinatensystems beschrieben, korrespondierend zur Approximation des Verschiebungsfeldes (2.47) bei Reihenabbruch nach dem vierten Glied ( $d = 3$ ). Es beträgt für diese Kraftverteilung der Vektor der zu den Verschiebungen der Direktoren konjugierten äußeren Kräfte für einen auf vier Funktionen beschränkten Vektor  $\underline{\Omega}$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_a^{*A} &= \int_H \left( a_3 (\Theta^3)^3 + a_2 (\Theta^3)^2 + a_1 \Theta^3 + a_0 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \Theta^3 \\ (\Theta^3)^2 \\ (\Theta^3)^3 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{e}_i d\Theta^3 \\ &= \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{F}_a^* \\ {}_1\mathbf{F}_a^* \\ {}_2\mathbf{F}_a^* \\ {}_3\mathbf{F}_a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}a_3H^4 + \frac{1}{3}a_2H^3 + \frac{1}{2}a_1H^2 + a_0H \\ \frac{1}{5}a_3H^5 + \frac{1}{4}a_2H^4 + \frac{1}{3}a_1H^3 + \frac{1}{2}a_0H^2 \\ \frac{1}{6}a_3H^6 + \frac{1}{5}a_2H^5 + \frac{1}{4}a_1H^4 + \frac{1}{3}a_0H^3 \\ \frac{1}{7}a_3H^7 + \frac{1}{6}a_2H^6 + \frac{1}{5}a_1H^5 + \frac{1}{4}a_0H^4 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (2.185)$$

Stellt man die durch das Lastvektorfeld (2.184) eingeführten Parameter in Abhängigkeit der Maßzahlen der Elemente

$${}_l\mathbf{F}_a^* = {}_lF_a^i \mathbf{e}_i \quad (2.186)$$

des Spaltenvektors der äußeren Kräfte dar, entsteht ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_3 &= -140H^{-7} \left( -12H^2 {}_1F_a^i + 30H {}_2F_a^i + H^3 {}_0F_a^i - 20 {}_3F_a^i \right) \\ a_2 &= 60H^{-6} \left( 108H {}_2F_a^i - 45H^2 {}_1F_a^i + 4H^3 {}_0F_a^i - 70 {}_3F_a^i \right) \\ a_1 &= -60H^{-5} \left( 45H {}_2F_a^i - 20H^2 {}_1F_a^i + 2H^3 {}_0F_a^i - 28 {}_3F_a^i \right) \\ a_0 &= 4H^{-4} \left( 4H^3 {}_0F_a^i - 30H^2 {}_1F_a^i + 60H {}_2F_a^i - 35 {}_3F_a^i \right) \end{aligned} \quad (2.187)$$

zur Bestimmung des Funktionsverlaufes der Belastung (2.184) in Abhängigkeit der Maßzahlen  ${}_l F_a^i$  der Direktorkräfte. Im Weiteren werden die zu den einzelnen Direktorkräften bzw. zu Kombinationen aus ihnen gehörenden Belastungsfunktionen exemplarisch an einem Schalenkörper der Dicke  $H = 1$  ermittelt. Die Größe der jeweiligen resultierenden Flächenlast der über die Höhe entlang der  $\Theta^3$ -Linie verteilten volumenbezogenen Last  $\mathbf{F}_a^A$  im Bereich des Schalenkörpers wird durch

$$P^* = \int_0^H \left( a_3 (\Theta^3)^3 + a_2 (\Theta^3)^2 + a_1 \Theta^3 + a_0 \right) d\Theta^3 \quad (2.188)$$

berechnet. Zudem wird jeweils die Größe eines fiktiven Momentes

$$M^* = \int_0^H \left( a_3 (\Theta^3)^3 + a_2 (\Theta^3)^2 + a_1 \Theta^3 + a_0 \right) \left( \Theta^3 - \frac{H}{2} \right) d\Theta^3 \quad (2.189)$$

mit dem Hebelarm  $\Theta^3 - H/2$  berechnet, das für den Fall

$$\mathbf{F}_a^A \cdot \mathbf{A}_3 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F}_a^A \cdot \mathbf{G}_3 = 0 \quad (2.190)$$

den physikalischen Wert einer Biegemomentenbelastung für die Schale darstellt. In diesen und in allen anderen Fällen gibt  $M^*$  zudem den Abstand der Resultierenden  $P^*$  auf der  $\Theta^3$ -Linie zur Stelle  $\Theta^3 = H/2$  an, wenn  ${}_0 \mathbf{F}_a^* = \mathbf{e}_i$ .

### Referenzflächenlast.

Es wird der Lastvektor so vorgegeben, dass das Lastvektorfeld einer Kraft konjugiert zur Verschiebung des 0. Direktors bzw. Referenzflächen-Ortsvektors in Richtung  $\mathbf{e}_i$  entspricht. Das heißt, im Spaltenvektor der Direktorkräfte (2.165) wird zur Approximation einer Volumenlast nur die Position der Oberflächenlast in der Referenzfläche belegt:

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*0} = [ {}_0 \mathbf{F}_a^* \quad {}_1 \mathbf{F}_a^* \quad {}_2 \mathbf{F}_a^* \quad {}_3 \mathbf{F}_a^* ]^T = [ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ]^T \otimes \mathbf{e}_i . \quad (2.191)$$

Der kubische Funktionsverlauf (2.184) der Last ergibt sich für diese Konstellation zu:

$$\mathbf{F}_a(\Theta^3) = \mathbf{F}_a^0 = \left( -140 (\Theta^3)^3 + 240 (\Theta^3)^2 - 120 \Theta^3 + 16 \right) \mathbf{e}_i , \quad (2.192)$$

dargestellt in Abb. 2.13 c) 1. Bild mit  $P^* = 1$  nach (2.188) und  $M^* = -0,5$  nach (2.189). Dieser Wert für  $M^*$  zeigt, dass sich die Resultierende  $P^*$  bei der erhaltenen Lastverteilung über die Dickenrichtung in der Referenzfläche befindet. Diese Approximation einer Volumenlast soll deshalb Referenzflächenlast genannt werden. In den Abb. 2.13 a) und b) jeweils 1. Bild ist der lineare und quadratische Funktionsverlauf der Last abgebildet, der sich bei Belastung des 0. Direktors für ein durch eine lineare bzw. quadratische Funktion beschriebenes Lastvektorfeld, korrespondierend zur Approximation des Verschiebungsfeldes (2.44) bei Reihenabbruch nach dem zweiten bzw. dritten Glied ( $d = 1$  bzw.  $d = 2$ ) ergibt, wobei  $P^*$  und  $M^*$  dabei die Werte wie im Fall c) haben.

### Kubische Lastverteilung.

Will man das Oszillieren der Lastfunktion (2.192) entlang der  $\Theta^3$ -Linie vermeiden, kann man den Funktionsverlauf (2.171) nutzen und nicht wie in (2.175) für  $k \rightarrow \infty$  wählen, sondern durch  $k = 3$  einen kubischen Funktionsverlauf finden. Damit ergibt sich für den Lastvektor

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*C} = [ {}_0 \mathbf{F}_a^* \quad {}_1 \mathbf{F}_a^* \quad {}_2 \mathbf{F}_a^* \quad {}_3 \mathbf{F}_a^* ]^T = [ 1 \quad 0,2 \quad 0,066666 \quad 0,028571 ]^T \otimes \mathbf{e}_i \quad (2.193)$$

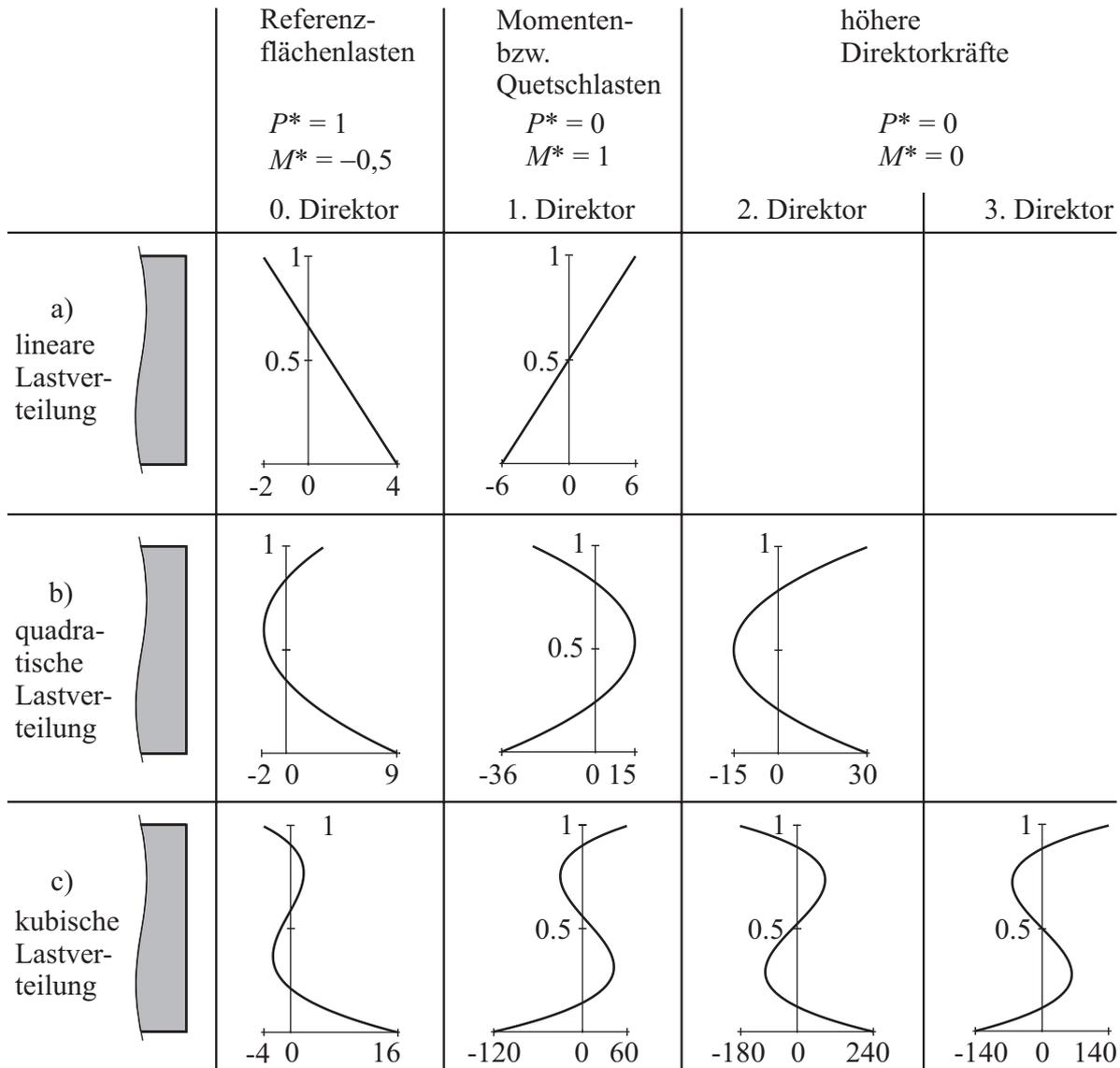


Abbildung 2.13: Approximation von Volumenlasten (Lastverteilungsfunktionen entlang der Schalen-  
dicke): Lastvektorfelder bei eingetragenen zur Verschiebung einzelner Direktoren konjugierten Kräfte bei insg. a) 1 Direktor; b) 2 Direktoren; c) 3 Direktoren

und für den kubischen Funktionsverlauf

$$\mathbf{F}_a(\Theta^3) = \mathbf{F}_a^c = \left( -4 (\Theta^3)^3 + 12 (\Theta^3)^2 - 12 \Theta^3 + 4 \right) \mathbf{e}_i, \quad (2.194)$$

dargestellt in Abb. 2.14 mit  $P^* = 1$  nach (2.188) und  $M^* = -0,3$  nach (2.189). Damit wird jedoch deutlich, dass der Versatz des Schwerpunktes gegenüber der Mitte des Schalenkörpers des durch diese äußere Last eingetragenen Spannungsfeldes entlang der  $\Theta^3$ -Linie von dem der Referenzflächenlast abweicht.

### Momenten- bzw. Quetschlast.

Es wird der Lastvektor so vorgegeben, dass das Lastvektorfeld einer Kraft konjugiert zur Verschiebung des 1. Direktors in Richtung  $\mathbf{e}_i$  entspricht:

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*1} = [ {}_0\mathbf{F}_a^* \quad {}_1\mathbf{F}_a^* \quad {}_2\mathbf{F}_a^* \quad {}_3\mathbf{F}_a^* ]^T = [ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 ]^T \otimes \mathbf{e}_i. \quad (2.195)$$

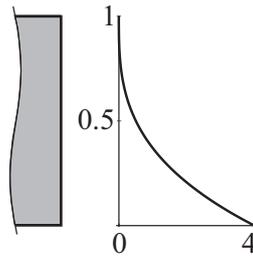


Abbildung 2.14: Lastvektorfeld für ausgewählte Lastkonstellation bei insg. 3 Direktoren

Der kubische Funktionsverlauf (2.184) der Last ergibt sich für diese Konstellation zu:

$$\mathbf{F}_a(\Theta^3) = \mathbf{F}_a^1 = \left( 1680 (\Theta^3)^3 - 2700 (\Theta^3)^2 - 1200 \Theta^3 - 120 \right) \mathbf{e}_i, \quad (2.196)$$

dargestellt in Abb. 2.13 c) 2. Bild mit  $P^* = 0$  nach (2.188) und  $M^* = 1$  nach (2.189). In den Abb. 2.13 a) und b) jeweils 2. Bild ist der lineare und quadratische Funktionsverlauf der Last abgebildet, der sich bei Belastung des 1. Direktors für ein durch eine lineare bzw. quadratische Funktion beschriebenes Lastvektorfeld, korrespondierend zur Approximation des Verschiebungsfeldes (2.44) bei Reihenabbruch nach dem zweiten bzw. dritten Glied ( $d = 1$  bzw.  $d = 2$ ) ergibt, wobei  $P^*$  und  $M^*$  dabei die Werte wie im Fall c) haben.

### Höhere Direktorkräfte.

Es wird der Lastvektor so vorgegeben, dass das Lastvektorfeld einer Kraft konjugiert zur Verschiebung des 2. Direktors in die Richtung  $\mathbf{e}_i$  entspricht:

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*2} = \left[ {}_0\mathbf{F}_a^* \quad {}_1\mathbf{F}_a^* \quad {}_2\mathbf{F}_a^* \quad {}_3\mathbf{F}_a^* \right]^T = \left[ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right]^T \otimes \mathbf{e}_i. \quad (2.197)$$

Der kubische Funktionsverlauf (2.184) der Last ergibt sich für diese Konstellation zu:

$$\mathbf{F}_a(\Theta^3) = \mathbf{F}_a^2 = \left( -4200 (\Theta^3)^3 + 6480 (\Theta^3)^2 - 2700 \Theta^3 + 240 \right) \mathbf{e}_i, \quad (2.198)$$

dargestellt in Abb. 2.13 c) 3. Bild mit  $P^* = 0$  nach (2.188) und  $M^* = 0$  nach (2.189). In Abb. 2.13 b) 3. Bild ist der quadratische Funktionsverlauf der Last abgebildet, der sich bei Belastung des 2. Direktors für ein durch eine quadratische Funktion beschriebenes Lastvektorfeld, korrespondierend zur Approximation des Verschiebungsfeldes (2.44) bei Reihenabbruch nach dem dritten Glied ( $d = 2$ ) ergibt, wobei  $P^*$  und  $M^*$  dabei die Werte wie im Fall der Abb. 2.13 c) haben.

Es wird der Lastvektor so vorgegeben, dass das Lastvektorfeld einer Kraft konjugiert zur Verschiebung des 3. Direktors in Richtung  $\mathbf{e}_i$  entspricht:

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*3} = \left[ {}_0\mathbf{F}_a^* \quad {}_1\mathbf{F}_a^* \quad {}_2\mathbf{F}_a^* \quad {}_3\mathbf{F}_a^* \right]^T = \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right]^T \otimes \mathbf{e}_i. \quad (2.199)$$

Der kubische Funktionsverlauf (2.184) der Last ergibt sich für diese Konstellation zu:

$$\mathbf{F}_a(\Theta^3) = \mathbf{F}_a^3 = \left( 2800 (\Theta^3)^3 - 4200 (\Theta^3)^2 + 1680 \Theta^3 - 140 \right) \mathbf{e}_i, \quad (2.200)$$

dargestellt in Abb. 2.13 c) 4. Bild mit  $P^* = 0$  nach (2.188) und  $M^* = 0$  nach (2.189).

### Oberflächenlast, der Referenzfläche gegenüberliegend.

Nutzt man den Funktionsverlauf (2.177) und wählt in (2.180)  $k \rightarrow \infty$ , erhält man den Lastvektor

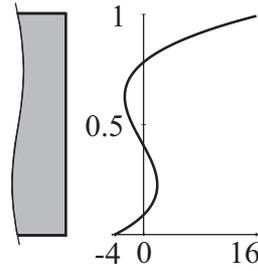


Abbildung 2.15: Lastvektorfeld bei Superposition aller zur Verschiebung einzelner Direktoren konjugierten Kräfte bei insg. 3 Direktoren

so, dass das Lastvektorfeld annähernd einer Last, die an der der Referenzfläche gegenüberliegenden Oberfläche der Schale eingetragen wird, entspricht:

$$\underline{\mathbf{F}}_a^{*H} = [ {}_0\mathbf{F}_a^* \quad {}_1\mathbf{F}_a^* \quad {}_2\mathbf{F}_a^* \quad {}_3\mathbf{F}_a^* ]^T = [ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 ]^T \otimes \mathbf{e}_i. \quad (2.201)$$

Der kubische Funktionsverlauf (2.184) der Last ergibt sich für diese Konstellation zu:

$$\mathbf{F}_a(\Theta^3) = \mathbf{F}_a^H = \left( 140 (\Theta^3)^3 - 180 (\Theta^3)^2 + 60 \Theta^3 - 4 \right) \mathbf{e}_i, \quad (2.202)$$

dargestellt in Abb. 2.15 mit  $P^* = 1$  nach (2.188) und  $M^* = 0,5$  nach (2.189).

### Ergänzende Erläuterung zu Abb. 2.13.

In Abb. 2.13 sind neben den u. a. vier vorgestellten Funktionsverläufen der Abb. 2.13 c) die Verläufe der Belastungsfunktionen über die Dickenrichtung der Schale dargestellt, die zu den einzelnen Direktorkräften (2.170) gehören, wenn das Lastvektorfeld  $\mathbf{F}_a(\Theta^3)$  für die über die Schalenhöhe veränderliche volumenbezogene Last entlang der  $\Theta^3$ -Linie durch eine Funktion 2. Grades, vgl. Abb. 2.13 b), bzw. 1. Grades, vgl. Abb. 2.13 a), in Richtung des Basisvektors  $\mathbf{e}_i$  beschrieben wird. Dieser quadratische bzw. lineare Verlauf der Belastungsfunktion korrespondiert jeweils zur Approximation des Verschiebungsfeldes (2.45) bei Reihenabbruch nach dem dritten bzw. zweiten Glied ( $d = 2$  bzw.  $d = 1$ ), d. h. bei Verwendung von zwei Direktoren oder einem Direktor. Ohne zumindest einen Direktor kann keine Verteilung von Belastungsfunktionen über die Schalendicke dargestellt werden. Die Funktionsverläufe ergeben sich jeweils aus der Belastung eines einzelnen Direktors mit der Größe 1. Für alle Belastungsfunktionen der Abb. 2.13 a) bis c), die zu den jeweils 0. Direktoren gehören, gilt  $P^* = 1$  und  $M^* = -0,5$ . Das heißt, dass der Versatz der Schwerpunkte gegenüber der Mitte des Schalenkörpers der durch diese äußere Lasten, mit jeweils der resultierenden Kraft der Größe 1, eingetragenen Spannungsfelder entlang der  $\Theta^3$ -Linie jeweils die halbe Schalendicke in Richtung der Schalenreferenzfläche beträgt, dass also die Resultierenden dieser Lasten alle in der Schalenreferenzfläche angreifen und damit eine Momenten- bzw. Quetschwirkung verbunden ist. Für alle Belastungsfunktionen der Abb. 2.13 a) bis c), die zu den jeweils 1. Direktoren gehören, gilt  $P^* = 0$  und  $M^* = 1$ . Das heißt, dass die Resultierenden dieser Lasten verschwinden und ein resultierendes Moment der Größe 1 eingetragen wird bzw. damit eine Quetschwirkung verbunden ist. Für alle Belastungsfunktionen der Abb. 2.13 b) und c), die zu den jeweils höheren Direktoren gehören, gilt  $P^* = 0$  und  $M^* = 0$ . Das heißt, dass mit dem Eintragen dieser Belastungsfunktionen (ab 2. Direktor) weder eine resultierende Kraft- noch Momentenwirkung auf die Schale verbunden, die Belastungswirkung also sehr lokal ist.

## 2.9 Methode der finiten Elemente

### 2.9.1 Linearisierung

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (2.151) liefert bei Verwendung der hier eingeführten nichtlinearen Verzerrungsmaße eine nichtlineare Funktion im Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$ . Lösungen für  $\mathbf{u}$  können durch iterative Lösungsverfahren erhalten werden. Das dabei am häufigsten verwendete Lösungsverfahren ist das NEWTON-RAPHSON-Verfahren. Dafür werden an einzelnen Punkten  $P$  im Schalenkörper die virtuellen Arbeiten für einen bekannten Verschiebungsvektor  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$  zunächst in TAYLOR-Reihen entwickelt, die jeweils nach dem ersten Glied, s. zweiter Summand in (2.203), abgebrochen werden, vgl. [ECKSTEIN 1999], und das Funktional wird an dieser Stelle ausgewertet. Das heißt, es wird eine Linearisierung des nichtlinearen Funktionals an der Stelle  $\mathbf{u}^*$  vorgenommen. Diese ermöglicht durch das Lösen einer linearen Gleichung die Ermittlung eines Verschiebungsvektors  $\Delta\mathbf{u}$  in  $P$ . Das Funktional kann nun an der Stelle  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u}$  erneut ausgewertet werden. Das wird so lange wiederholt, bis der zweite Summand in (2.203) verschwindet. Zudem wird die äußere Last beim NEWTON-RAPHSON-Verfahren in mehrere sogenannte Lastschritte unterteilt, für die jeweils eine Lösung des Funktionals gefunden werden muss. Werden für einen beliebigen Punkt  $P$  bzw.  ${}_0P$  der Schale die virtuelle innere Arbeit durch  $\delta w_i$ , vgl. (2.152), und die virtuelle äußere Arbeit durch  $\delta w_a$ , vgl. (2.153), bezeichnet, stellt sich die Linearisierung von (2.151), die sogenannte GATEAUX-Ableitung, wie folgt dar:

$$\delta w_i + \left. \frac{\partial (\delta w_i)}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^*} \cdot \Delta\mathbf{u} + \delta w_a = 0. \quad (2.203)$$

Die Linearisierung der Anteile aus virtueller äußerer Arbeit wird nicht durchgeführt. Es werden damit nur sogenannte richtungstreue bzw. konservative Lasten berücksichtigt. Die virtuelle innere Arbeit

$$\delta w_i = -\mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (2.204)$$

an einem Punkt der Schale kann analog (2.152) durch die erste Variation deren Potentials berechnet werden. Aus (2.203) entsteht dann

$$\mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \right) \cdot \Delta\mathbf{u} - \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{u} = 0, \quad (2.205)$$

was unter Beachtung der Produktregel zu

$$\mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} + \left( \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} \right) \cdot \delta \mathbf{u} \right) \cdot \Delta\mathbf{u} - \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{u} = 0 \quad (2.206)$$

wird. Werden die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  aus allen Termen ausgeklammert und wird anschließend über das Volumen des Schalenkörpers und die Oberfläche integriert, entsteht eine integrale Aussage des Kräftegleichgewichtes:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} dV + \int_{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} \right) dV \cdot \Delta\mathbf{u} - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_a dV - \int_{\mathcal{S}} {}_0\mathbf{F}_a dA = 0. \quad (2.207)$$

### 2.9.2 Diskretisierung

Geschlossene analytische Lösungen für (2.207) sind nur für einfachste Problemstellungen zu erhalten. Um dieses Kräftegleichgewicht einer Näherungslösung zuführen zu können, wird, wie oben angesprochen, auf numerische Verfahren zurückgegriffen, für die es erforderlich ist, das Verschiebungsfeld (2.44) in der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}$  zu diskretisieren. Dies geschieht analog der Diskretisierung der Geometrie der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}$ , woraus im Folgenden sogenannte isoparametrische finite Elemente hervorgehen. Das zu betrachtende Gebiet wird dazu in einfach berandete Untergebiete unterteilt, die als finite Elemente bezeichnet werden.

#### Diskretisierung der Geometrie.

Der Grundgedanke für die Formulierung von isoparametrischen finiten Schalenelementen ist es, alle Element-Verschiebungen, in diesem Fall die Verschiebungen  ${}_l\mathbf{u}$  der Direktoren, in einem beliebigen Punkt  ${}_0P$  der Schalenreferenzfläche durch Element-Knotenpunktverschiebungen bei Verwendung von Interpolationsfunktionen, die auch für die Interpolation der Geometrie, also für die Direktoren  ${}_l\mathbf{X}$ , vgl. (2.18), verwendet werden, auszudrücken. Dazu wird ein finites Element mit

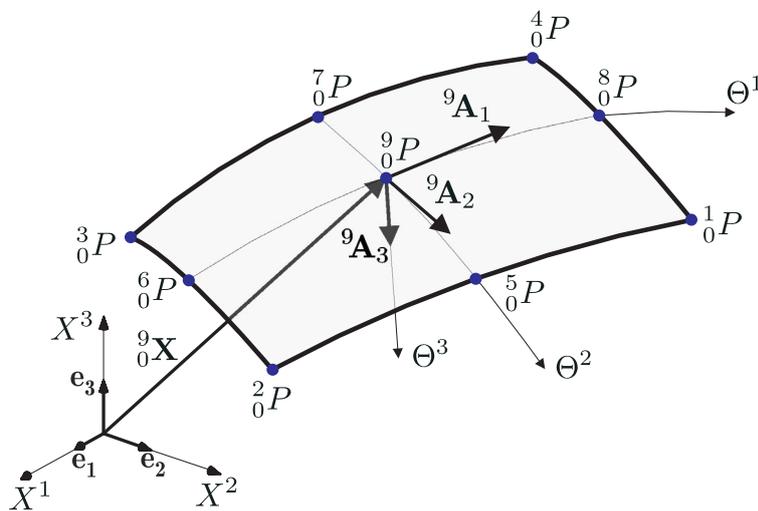


Abbildung 2.16: Geometrie des finiten Elementes

$e = 9$  Knoten eingeführt, s. Abb. 2.16. Die Element-Knotenpunkte  ${}_eP(\Theta^1, \Theta^2)$  mit  $e = 1, 2, \dots, 9$  erhalten die Koordinaten

$$\begin{aligned} & {}^1_0P(1, 0; 1, 0); \quad {}^2_0P(-1, 0; 1, 0); \quad {}^3_0P(-1, 0; -1, 0); \quad {}^4_0P(1, 0; -1, 0); \\ & {}^5_0P(0, 0; 1, 0); \quad {}^6_0P(-1, 0; 0, 0); \quad {}^7_0P(0, 0; -1, 0); \quad {}^8_0P(1, 0; 0, 0); \\ & {}^9_0P(0, 0; 0, 0). \end{aligned} \tag{2.208}$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung von Knotenpunkten des finiten Elementes sowie von mit ihnen korrespondierenden skalaren Größen oder Matrizen, d. h. von Termen, die einen mit der Nummerierung der Knotenpunkte korrespondierenden Index tragen, stets durch die vorangestellte einfache obere Indizierung  ${}^e\Box$  mit einer natürlichen Zahl  $e \in \mathbb{N}$  erfolgt.

Für diese zweidimensionale Interpolation werden in [BATHE 1990] die LAGRANGE-Polynome  ${}^e_n(\Theta^1, \Theta^2)$  mit  $e = 1, 2, \dots, 9$  als Interpolationsfunktionen angegeben, die wie folgt gebildet

werden:

$$\begin{aligned}
{}^1n &= {}^1h - \frac{1}{2} {}^5h - \frac{1}{2} {}^8h + \frac{1}{4} {}^9h; & {}^2n &= {}^2h - \frac{1}{2} {}^5h - \frac{1}{2} {}^6h + \frac{1}{4} {}^9h; \\
{}^3n &= {}^3h - \frac{1}{2} {}^6h - \frac{1}{2} {}^7h + \frac{1}{4} {}^9h; & {}^4n &= {}^4h - \frac{1}{2} {}^7h - \frac{1}{2} {}^8h + \frac{1}{4} {}^9h; \\
{}^5n &= {}^5h - \frac{1}{2} {}^9h; & {}^6n &= {}^6h - \frac{1}{2} {}^9h; \\
{}^7n &= {}^7h - \frac{1}{2} {}^9h; & {}^8n &= {}^8h - \frac{1}{2} {}^9h; \\
{}^9n &= {}^9h,
\end{aligned} \tag{2.209}$$

mit

$$\begin{aligned}
{}^1h &= \frac{1}{4} (1 + \Theta^1) (1 + \Theta^2); & {}^2h &= \frac{1}{4} (1 - \Theta^1) (1 + \Theta^2); \\
{}^3h &= \frac{1}{4} (1 - \Theta^1) (1 - \Theta^2); & {}^4h &= \frac{1}{4} (1 + \Theta^1) (1 - \Theta^2); \\
{}^5h &= \frac{1}{2} (1 - (\Theta^1)^2) (1 + \Theta^2); & {}^6h &= \frac{1}{2} (1 - (\Theta^2)^2) (1 - \Theta^1); \\
{}^7h &= \frac{1}{2} (1 - (\Theta^1)^2) (1 - \Theta^2); & {}^8h &= \frac{1}{2} (1 - (\Theta^2)^2) (1 + \Theta^1); \\
{}^9h &= (1 - (\Theta^1)^2) (1 - (\Theta^2)^2).
\end{aligned} \tag{2.210}$$

Die Ableitungen

$${}^e n_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial \Theta^\alpha} {}^e n; \quad {}^e n_{,\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial \Theta^\beta \partial \Theta^\alpha} {}^e n \tag{2.211}$$

der Formfunktionen nach den Koordinatenlinien  $\Theta^\alpha$  werden durch Ableitung der Funktionen (2.210) gebildet. An den Element-Knotenpunkten sind im Allgemeinen neben der Schalendicke die Koordinaten der Schalenreferenzfläche eines finiten Elementes bekannt, d. h., dass die Ortsvektoren

$${}^e_0 \mathbf{X} = {}^e X^i \mathbf{e}_i \tag{2.212}$$

zu den Punkten  ${}^e_0 P$  in  $\mathcal{S}$  gegeben sind, die analog (2.4) dargestellt werden. Mit Hilfe der eingeführten Formfunktionen (2.209) wird die Interpolation des Ortsvektors (2.4),

$${}_0 \mathbf{X} = X^i (\Theta^1, \Theta^2) \mathbf{e}_i = \sum_{e=1}^9 {}^e n (\Theta^1, \Theta^2) {}^e X^i \mathbf{e}_i, \tag{2.213}$$

zu einem beliebigen Punkt  ${}_0 P$  in  $\mathcal{S}$  vorgenommen.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die im Rahmen der tensoriellen Notation eingeführte EINSTEINSche Summationskonvention, nach der ein Term über  $i$  von 1 bis 3 zu summieren ist, wenn Größen mit gegenständigen Indizierungen mit gleichem Buchstaben diesen Term durch ein Produkt bilden, nach wie vor Anwendung findet und diese Summe weiterhin nicht durch ein Summenzeichen dargestellt wird.

In gleicher Weise wie der Ortsvektor wird die innerhalb des differentiellen Schalenelementes leicht veränderliche Schalendicke zwischen den Werten der Schalendicke  ${}^e H$  an den Element-Knotenpunkten interpoliert:

$$H(\Theta^1, \Theta^2) = \sum_{e=1}^9 {}^e n(\Theta^1, \Theta^2) {}^e H. \quad (2.214)$$

Mit (2.211) und (2.213) stehen die Grundlagen zur Berechnung der Basisvektoren

$$\mathbf{A}_\alpha = {}_0\mathbf{X}_{,\alpha} = \sum_{e=1}^9 {}^e n_{,\alpha} {}^e X^i \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{A}_{\alpha,\beta} = \sum_{e=1}^9 {}^e n_{,\alpha\beta} {}^e X^i \mathbf{e}_i \quad (2.215)$$

der Referenzfläche nach (2.6) und deren Ableitungen zur Berechnung der Krümmungen (2.12) zur Verfügung.

Der normierte Normalenvektor im Punkt  ${}_0P$  in  $\mathcal{S}$  wird aus (2.7) erhalten. Dieser ist über die Elementgrenzen hinweg unstetig. Damit können alle im Abschnitt 2.2 angegebenen Geometriegrößen für den unverformten Zustand des Schalenkörpers berechnet werden.

### Diskretisierung der Kinematik.

Analog (2.213) werden die Verschiebungsvektoren  ${}_l\mathbf{u}$  jeweils des  $l$ -ten Direktors, vgl. (2.43), in einem beliebigen Punkt  ${}_0P$  der Schalenreferenzfläche durch Element-Knotenpunktverschiebungsvektoren

$${}_l\mathbf{u} = {}_l u_i \mathbf{e}^i \quad (2.216)$$

der Direktoren bei Verwendung der selben Interpolationsfunktionen (2.209), wie sie für die Geometrie verwendet wurden, interpoliert:

$${}_l\mathbf{u} = {}_l u_i(\Theta^1, \Theta^2) \mathbf{e}^i = \sum_{e=1}^9 {}^e n(\Theta^1, \Theta^2) {}_l u_i \mathbf{e}^i. \quad (2.217)$$

Dabei sind die in (2.216) im Zuge der Finite-Element-Diskretisierung eingeführten Freiwerte  ${}_l u_i$  ( $i = 1, 2, 3; l = 0, \dots, d; e = 1, \dots, 9$ ) die Knotenverschiebungen jeweils des  $l$ -ten Direktors  ${}_l\mathbf{X}$  des Knotens  $e$  in Richtung des Basisvektors  $\mathbf{e}^i$  des einbettenden kartesischen Koordinatensystems, vgl. Abschnitt 2.2. Zur Berechnung der Verzerrungsmaße (2.62) bis (2.64) mit den Teilverzerrungsmaßen (2.65) bis (2.73) bzw. der Verzerrungsmaße (2.78) bis (2.80) der Oberfläche wird die Interpolation der Ableitungen der Verschiebungsvektoren jeweils des  $l$ -ten Direktors

$${}_l\mathbf{u}_{,\alpha} = \sum_{e=1}^9 {}^e n_{,\alpha} {}_l u_i \mathbf{e}^i \quad (2.218)$$

mit (2.211) berechnet. Damit können alle im Abschnitt 2.3 angegebenen kinematischen Größen und die im Abschnitt 2.4 angegebenen Verzerrungsmaße berechnet werden.

### Diskretisierung der Verzerrungen und deren Ableitungen.

Die im Abschnitt 2.4 angegebenen Teilverzerrungsmaße (2.65) bis (2.73) der Verzerrungsmaße  $E_{ir}$ , (2.62) bis (2.64), für jeden Punkt  $P$  des Schalenkörpers ergeben sich mit der Diskretisierung

der Verschiebungen (2.217) der Direktoren und deren Ableitungen (2.218) zu

$${}_l a_{\alpha\beta} = {}_l \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + {}_l \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha = \sum_{e=1}^9 ({}^e n_{,\alpha} \beta_\beta^i + {}^e n_{,\beta} \beta_\alpha^i) {}_l^e u_i \quad (2.219)$$

$${}_l b_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\lambda \cdot (B_\beta^\lambda {}_l \mathbf{u}_{,\alpha} + B_\alpha^\lambda {}_l \mathbf{u}_{,\beta}) = \sum_{e=1}^9 \beta_\lambda^i (B_\beta^\lambda {}^e n_{,\alpha} + B_\alpha^\lambda {}^e n_{,\beta}) {}_l^e u_i \quad (2.220)$$

$${}_{kl} c_{\alpha\beta} = {}_k \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot {}_l \mathbf{u}_{,\beta} = \sum_{e=1}^9 \left( \sum_{r=1}^9 {}^r n_{,\alpha} {}^r_k u_i {}^e n_{,\beta} \right) {}_l^e u_i \quad (2.221)$$

$${}_l d_{\alpha 3} = {}_l \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 = \sum_{e=1}^9 {}^e n_{,\alpha} \beta_3^i {}_l^e u_i \quad (2.222)$$

$${}_l e_{\alpha 3} = {}_l \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_\alpha = \sum_{e=1}^9 {}^e n \beta_\alpha^i {}_l^e u_i \quad (2.223)$$

$${}_l f_{\alpha 3} = B_\alpha^\lambda \mathbf{A}_\lambda \cdot {}_l \mathbf{u} = \sum_{e=1}^9 B_\alpha^\lambda {}^e n \beta_\lambda^i {}_l^e u_i \quad (2.224)$$

$${}_{kl} g_{\alpha 3} = {}_k \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot {}_l \mathbf{u} = \sum_{e=1}^9 \left( \sum_{r=1}^9 {}^r n_{,\alpha} {}^r_k u_i {}^e n \right) {}_l^e u_i \quad (2.225)$$

$${}_l h_{33} = 2 {}_l \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_3 = 2 \sum_{e=1}^9 {}^e n \beta_3^i {}_l^e u_i \quad (2.226)$$

$${}_{kl} i_{33} = {}_k \mathbf{u} \cdot {}_l \mathbf{u} = \sum_{e=1}^9 \left( \sum_{r=1}^9 {}^r n {}^r_k u_i {}^e n \right) {}_l^e u_i. \quad (2.227)$$

Darin wurden die Transformationskoeffizienten

$$\beta_j^i = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{A}_j \quad (2.228)$$

verwendet. Für die Diskretisierung des Kräftegleichgewichtes (2.207) werden die ersten Ableitungen  $\partial E_{ir} / \partial {}_m^f u_j$ ,

$$\frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial {}_m^f u_j} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \left( \frac{\partial {}_l a_{\alpha\beta}}{\partial {}_m^f u_j} {}_l \Omega - \Theta^3 \frac{\partial {}_l b_{\alpha\beta}}{\partial {}_m^f u_j} {}_l \Omega + \sum_{k=0}^d \left( \frac{\partial {}_{kl} c_{\alpha\beta}}{\partial {}_m^f u_j} {}_k \Omega {}_l \Omega \right) \right) \quad (2.229)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{3\alpha}}{\partial {}_m^f u_j} &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \left( \frac{\partial {}_l d_{\alpha 3}}{\partial {}_m^f u_j} {}_l \Omega + \frac{\partial {}_l e_{\alpha 3}}{\partial {}_m^f u_j} {}_l \Omega_{,3} - \Theta^3 \frac{\partial {}_l f_{\alpha 3}}{\partial {}_m^f u_j} {}_l \Omega_{,3} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^d \left( \frac{\partial {}_{kl} g_{\alpha 3}}{\partial {}_m^f u_j} {}_k \Omega {}_l \Omega_{,3} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.230)$$

$$\frac{\partial E_{33}}{\partial {}_m^f u_j} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \left( \frac{\partial {}_l h_{33}}{\partial {}_m^f u_j} {}_l \Omega_{,3} + \sum_{k=0}^d \left( \frac{\partial {}_{kl} i_{33}}{\partial {}_m^f u_j} {}_k \Omega_{,3} {}_l \Omega_{,3} \right) \right) \quad (2.231)$$

der Verzerrungsmaße (2.62) bis (2.64) nach allen Freiwerten  ${}^f_m u_j$  ( $j = 1, 2, 3; m = 0, \dots, d; f = 1, \dots, 9$ ) mit den Ableitungen der diskretisierten Teilverzerrungsmaße (2.219) bis (2.227), die sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^l a_{\alpha\beta}}{\partial {}^f_m u_j} &= \sum_{e=1}^9 ({}^e n_{,\alpha} \beta_{\beta}^i + {}^e n_{,\beta} \beta_{\alpha}^i) {}^l_m \delta_f^e \delta_j^i \delta \\ &= {}^l_m \delta ({}^f n_{,\alpha} \beta_{\beta}^j + {}^f n_{,\beta} \beta_{\alpha}^j) \end{aligned} \quad (2.232)$$

$$\frac{\partial {}^l b_{\alpha\beta}}{\partial {}^f_m u_j} = {}^l_m \delta \beta_{\lambda}^j (B_{\beta}^{\lambda} {}^f n_{,\alpha} + B_{\alpha}^{\lambda} {}^f n_{,\beta}) \quad (2.233)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^{kl} c_{\alpha\beta}}{\partial {}^f_m u_j} &= \sum_{e=1}^9 \left( \sum_{r=1}^9 r n_{,\alpha} {}^r_k u_i {}^e n_{,\beta} \right) {}^l_m \delta_f^e \delta_j^i \delta + \sum_{e=1}^9 \left( \sum_{r=1}^9 r n_{,\alpha} {}^r_f \delta_m^k \delta_j^i \delta {}^e n_{,\beta} \right) {}^e_l u_i \\ &= \sum_{e=1}^9 ({}^l_m \delta {}^f n_{,\beta} {}^e n_{,\alpha} {}^e_k u_j + {}^k_m \delta {}^f n_{,\alpha} {}^e n_{,\beta} {}^e_l u_j) \end{aligned} \quad (2.234)$$

$$\frac{\partial {}^l d_{\alpha 3}}{\partial {}^f_m u_j} = {}^l_m \delta {}^f n_{,\alpha} \beta_3^j \quad (2.235)$$

$$\frac{\partial {}^l e_{\alpha 3}}{\partial {}^f_m u_j} = {}^l_m \delta {}^f n_{,\alpha} \beta_{\alpha}^j \quad (2.236)$$

$$\frac{\partial {}^l f_{\alpha 3}}{\partial {}^f_m u_j} = {}^l_m \delta B_{\alpha}^{\lambda} {}^f n_{,\alpha} \beta_{\lambda}^j \quad (2.237)$$

$$\frac{\partial {}^{kl} g_{\alpha 3}}{\partial {}^f_m u_j} = \sum_{e=1}^9 ({}^l_m \delta {}^f n_{,\alpha} {}^e n_{,\alpha} {}^e_k u_j + {}^k_m \delta {}^f n_{,\alpha} {}^e n_{,\alpha} {}^e_l u_j) \quad (2.238)$$

$$\frac{\partial {}^l h_{33}}{\partial {}^f_m u_j} = 2 {}^l_m \delta {}^f n_{,\alpha} \beta_3^j \quad (2.239)$$

$$\frac{\partial {}^{kl} i_{33}}{\partial {}^f_m u_j} = \sum_{e=1}^9 ({}^l_m \delta {}^f n_{,\alpha} {}^e n_{,\alpha} {}^e_k u_j + {}^k_m \delta {}^f n_{,\alpha} {}^e n_{,\alpha} {}^e_l u_j) \quad (2.240)$$

ergeben, berechnet. Mit Hilfe des KRONECKER-Delta

$${}^l_m \delta = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq m \\ 1 & \text{für } l = m \end{cases} \quad (2.241)$$

kann die Ableitung

$$\frac{\partial {}^e_l u_i}{\partial {}^f_m u_j} = {}^l_m \delta_f^e \delta_j^i \delta \quad (2.242)$$

dargestellt werden, die nur dann nicht verschwindet, wenn es sich bei  ${}^e_l u_i$  und  ${}^f_m u_j$  um die selben Freiwerte handelt. Des Weiteren werden aus den ersten Ableitungen der Verzerrungsmaße (2.229)

bis (2.231) die zweiten Ableitungen  $\partial^2 E_{kl} / (\partial_m^f u_j \partial_n^s u_p)$ ,

$$\frac{\partial^2 E_{\alpha\beta}}{\partial_m^f u_j \partial_n^s u_p} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \sum_{k=0}^d \left( \frac{\partial^2 {}^{kl}c_{\alpha\beta}}{\partial_m^f u_j \partial_n^s u_p} {}^k\Omega_l \Omega \right) \quad (2.243)$$

$$\frac{\partial^2 E_{3\alpha}}{\partial_m^f u_j \partial_n^s u_p} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \sum_{k=0}^d \left( \frac{\partial^2 {}^{kl}g_{\alpha 3}}{\partial_m^f u_j \partial_n^s u_p} {}^k\Omega_l \Omega_{,3} \right) \quad (2.244)$$

$$\frac{\partial^2 E_{33}}{\partial_m^f u_j \partial_n^s u_p} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^d \sum_{k=0}^d \left( \frac{\partial^2 {}^{kl}i_{33}}{\partial_m^f u_j \partial_n^s u_p} {}^k\Omega_{,3} l \Omega_{,3} \right) \quad (2.245)$$

der Verzerrungsmaße (2.62) bis (2.64) nach allen Freiwerten  ${}^s u_p$  ( $p = 1, 2, 3; n = 0, \dots, d; s = 1, \dots, 9$ ) mit den zweiten Ableitungen der diskretisierten Teilverzerrungsmaße (2.219) bis (2.227), die sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 {}^{kl}c_{\alpha\beta}}{\partial_m^f u_j \partial_n^s u_p} &= \sum_{e=1}^9 ({}^l\delta_m^f n_{,\beta} {}^e n_{,\alpha} {}^e \delta_n^k \delta_p^j \delta + {}^k\delta_m^f n_{,\alpha} {}^e n_{,\beta} {}^e \delta_n^l \delta_p^j \delta) \\ &= {}^j\delta_p ({}^k\delta_n^l \delta_m^f n_{,\beta} {}^s n_{,\alpha} + {}^k\delta_m^l \delta_n^f n_{,\alpha} {}^s n_{,\beta}) \end{aligned} \quad (2.246)$$

$$\frac{\partial^2 {}^{kl}g_{\alpha 3}}{\partial_m^f u_j \partial_n^s u_p} = {}^j\delta_p ({}^k\delta_n^l \delta_m^f n^s n_{,\alpha} + {}^k\delta_m^l \delta_n^f n_{,\alpha} {}^s n) \quad (2.247)$$

$$\frac{\partial^2 {}^{kl}i_{33}}{\partial_m^f u_j \partial_n^s u_p} = {}^j\delta_p ({}^l\delta_m^f n^s n {}^k\delta_n + {}^k\delta_m^f n^s n {}^l\delta_n) \quad (2.248)$$

ergeben, berechnet.

### Diskretisierung der Spannungen und deren Ableitungen.

Zur Berechnung der diskretisierten Spannungsmaßzahlen

$$S^{kl} = C^{irkl} E_{ir} \quad (2.249)$$

des PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors 2. Art (2.87) für jeden Punkt  $P$  des Schalenkörpers werden in (2.143) die Verzerrungsmaße (2.62) bis (2.64) mit den diskretisierten Teilverzerrungsmaßen (2.219) bis (2.227) eingesetzt. Analog werden zur Berechnung der diskretisierten Spannungsmaßzahlen

$$\bar{S}^{kl} = C^{irkl} \bar{E}_{ir} \quad (2.250)$$

des PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors 2. Art (2.89) der Oberfläche für jeden Punkt  ${}_0P$  der Schalenreferenzfläche in (2.143) die Verzerrungsmaße (2.75) bis (2.77) der Oberfläche mit den diskretisierten Teilverzerrungsmaßen (2.219) bis (2.227) eingesetzt. Die zur Lösung von (2.207) benötigten Ableitungen von (2.249) können wegen des in Abschnitt 2.6 eingeführten linearen Materialverhaltens direkt durch

$$\frac{\partial S^{kl}}{\partial_m^f u_j} = C^{irkl} \frac{\partial E_{ir}}{\partial_m^f u_j} \quad (2.251)$$

aus den abgeleiteten diskretisierten Verzerrungsmaßen (2.229) bis (2.231) mit den abgeleiteten Teilverzerrungsmaßen (2.232) bis (2.240) berechnet werden.

### Diskretisierung der Oberflächenlasten und der Direktorkräfte.

Alle äußeren Belastungen auf den Schalenkörper werden durch die Oberflächenlasten (2.155) und die eingeführten Direktorkräfte (2.168) ausgedrückt. Jede einzelne Direktorkraft stellt, sofern sie nicht nur direkt an einem Element-Knotenpunkt gegeben ist, eine Lastverteilung bezüglich der Schalenreferenzfläche dar. Punktlasten, die nicht an einem Element-Knotenpunkt gegeben sind, oder Linienlasten werden durch eine entsprechende Flächenlast zwischen den Element-Knotenpunkten approximiert. Analog der Interpolation (2.213) der Direktoren bzw. der Verschiebungen der Direktoren nach Gleichung (2.217) werden die äußeren Lasten in Form der Oberflächenlasten  ${}_0\mathbf{F}_a$ , vgl. (2.155), und der Direktorkräfte  ${}_l\mathbf{F}_a$  jeweils des  $l$ -ten Direktors, vgl. (2.168), in einem beliebigen Punkt  ${}_0P$  der Schalenreferenzfläche durch Element-Knotenpunkt-Direktorkräfte

$${}_l\mathbf{F}_a = {}_lF_a^i \mathbf{e}_i \quad (2.252)$$

der Direktoren, bei Verwendung der selben Interpolationsfunktionen (2.209) wie sie für die Geometrie und die Kinematik verwendet wurden, zwischen den Element-Knotenpunkten interpoliert:

$${}_l\mathbf{F}_a = {}_lF_a^i(\Theta^1, \Theta^2) \mathbf{e}_i = \sum_{e=1}^9 {}^e n(\Theta^1, \Theta^2) {}_lF_a^i \mathbf{e}_i. \quad (2.253)$$

Dabei sind die in (2.252) im Zuge der Finite-Element-Diskretisierung eingeführten Knotenpunkt-Direktorkräfte  ${}_lF_a^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $l = 0, \dots, d$ ;  $e = 1, \dots, 9$ ) die äußere Belastung jeweils des  $l$ -ten Direktors  ${}_l\mathbf{X}$  des Knotens  $e$  in Richtung des Basisvektors  $\mathbf{e}_i$  des einbettenden kartesischen Koordinatensystems, vgl. Abschnitt 2.2.

Analog zu den Untersuchungen im Abschnitt 2.8.2 und 2.8.3, in denen der Frage nach der Verteilung äußerer Lasten in Dickenrichtung der Schale ausführlich nachgegangen wurde, soll im nachfolgenden Abschnitt die Verteilung äußerer Lasten über die Schalenreferenzfläche, die durch die vorgenommene Diskretisierung (2.253) in eine Verteilung auf die Elementknoten übergeht, näher untersucht werden. Ausgehend von der virtuellen äußeren Arbeit (2.159), worin

$$\delta {}_l\mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2) = \sum_{e=1}^9 {}^e n(\Theta^1, \Theta^2) \delta {}_l^e u_i \mathbf{e}^i \quad (2.254)$$

ersetzt wird, wird eine energieäquivalente Formulierung dieser Arbeit aus den Knotenpunkt-Direktorkräften gesucht:

$$\begin{aligned} \delta W_a &= \iint_S \sum_{l=0}^{\infty} \left( {}_l\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2) \cdot \sum_{e=1}^9 {}^e n(\Theta^1, \Theta^2) \delta {}_l^e u_i \mathbf{e}^i \right) dA \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{e=1}^9 {}_l\mathbf{F}_a \delta {}_l^e u_i \mathbf{e}^i. \end{aligned} \quad (2.255)$$

Nimmt man die Integration über die Elementfläche den Summationen über die Anzahl der Direktoren und die Anzahl der Knoten vorweg, kann formuliert werden:

$${}_l\mathbf{F}_a = \iint_S {}_l\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2) {}^e n(\Theta^1, \Theta^2) dA, \quad (2.256)$$

womit die Knotenpunkt-Direktorkräfte identifiziert sind. Zusammen mit (2.168) entsteht für die Knotenpunkt-Direktorkräfte eine Verknüpfung mit dem Kraftvektorfeld  $\mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$  der äußeren Lasten:

$${}^e_l \mathbf{F}_a = \iint_S \int_H {}^l \Omega(\Theta^3) \mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mu(\Theta^3) d\Theta^3 e_n(\Theta^1, \Theta^2) dA \quad (2.257)$$

bzw.

$${}^e_l F_{ai} = {}^e_l F_a^i = \iint_S \int_H {}^l \Omega(\Theta^3) F_a^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mu(\Theta^3) d\Theta^3 e_n(\Theta^1, \Theta^2) dA \quad (2.258)$$

für die einzelnen Komponenten der Knotenpunkt-Direktorkräfte in Richtung  $\mathbf{e}_i$ .

Es soll eine über die Elementfläche konstante Direktorkraft

$${}^l \mathbf{F}_a(\Theta^1, \Theta^2) = {}^l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = \mathbf{e}_i \quad (2.259)$$

untersucht werden. Für  $l = 0$  z. B. entspricht das einer über die Referenzfläche des Schalenkörpers unveränderlichen Flächenlast. Die Knotenpunkt-Direktorkräfte ergeben sich mit (2.256) für (2.259) allgemein zu

$${}^e_l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e_n(\Theta^1, \Theta^2) \sqrt{A} d\Theta^1 d\Theta^2 \mathbf{e}_i. \quad (2.260)$$

Für eine Elementfläche der Größe 1, die man mit den Elementknotenpunkten (2.208) z. B. erhält, wenn für ein quadratisches ebenes Element die Koordinaten

$$X^\alpha(\Theta^1, \Theta^2, 0) = \frac{\Theta^\alpha}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq X^\alpha \leq 1 \quad (2.261)$$

in (2.4) an den Elementrändern vorgegeben werden, ergibt sich mit (2.6), (2.9) und (2.10)

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{e}_\alpha, \quad \sqrt{A} = \frac{1}{4}. \quad (2.262)$$

Daraus erhält man mit den Formfunktionen (2.209) die Knotenpunkt-Direktorkräfte an den Eckknoten 1, 2, 3, 4 des 9-knotigen quadratischen finiten Elementes zu

$${}^1_l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = {}^2_l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = {}^3_l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = {}^4_l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = \frac{1}{36} \mathbf{e}_i, \quad (2.263)$$

an den Seitenmittenknoten 5, 6, 7, 8 des 9-knotigen finiten Elementes zu

$${}^5_l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = {}^6_l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = {}^7_l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = {}^8_l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = \frac{4}{36} \mathbf{e}_i \quad (2.264)$$

und am Elementmittenknoten 9 des 9-knotigen finiten Elementes zu

$${}^9_l \mathbf{F}_a^{\text{konst}} = \frac{16}{36} \mathbf{e}_i. \quad (2.265)$$

### 2.9.3 Tangentiale Steifigkeitsmatrix und Vektor der inneren Kräfte

Werden in (2.207) die diskretisierten Größen, und zwar die Verzerrungsmaße (2.62) bis (2.64) mit (2.219) bis (2.227), deren erste Ableitungen nach allen eingeführten Freiwerten (2.229) bis (2.231) mit (2.232) bis (2.240), deren zweite Ableitungen nach allen eingeführten Freiwerten (2.243) bis (2.245) mit (2.246) bis (2.248), die Spannungen (2.249), deren erste Ableitungen nach allen eingeführten Freiwerten (2.251) und die Knotenpunkt-Direktorkräfte (2.258) eingeführt, entsteht unmittelbar folgendes Gleichungssystem:

$$\int_{\mathcal{B}} C^{irkl} E_{ir} \frac{\partial E_{kl}}{\partial^f_m u_j} dV + \sum_{s=1}^9 \sum_{n=0}^d \sum_{p=1}^3 \left( \int_{\mathcal{B}} C^{irkl} \left( \frac{\partial E_{ir}}{\partial^f_m u_j} \frac{\partial E_{kl}}{\partial^s_n u_p} + E_{ir} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial^f_m u_j \partial^s_n u_p} \right) dV \frac{s}{n} u_p \right) - \frac{f}{m} F_{aj} = 0 \quad (2.266)$$

mit  $3 \cdot 9 \cdot (d+1)$  Gleichungen. Die Summationen über  $s, n, p$  erfolgen entsprechend der Indizierungen der Elemente  $\frac{s}{n} u_p$  ( $p = 1, 2, 3; n = 0, \dots, d; s = 1, \dots, 9$ ) des Spaltenvektors der Freiwerte. Die im Rahmen der Summationskonvention der Tensorrechnung getroffene Vereinbarung der Summationen über gegenständige Indizierungen, hier der Indizierungen  $i, r, k, l$ , bleibt bestehen. In (2.266) werden durch

$$\frac{f}{m} f_j = \int_{\mathcal{B}} C^{irkl} E_{ir} \frac{\partial E_{kl}}{\partial^f_m u_j} dV \quad (2.267)$$

die Elemente des Spaltenvektors der inneren Kräfte und durch

$$\frac{sf}{nm} k_{jpp} = \int_{\mathcal{B}} C^{irkl} \left( \frac{\partial E_{ir}}{\partial^f_m u_j} \frac{\partial E_{kl}}{\partial^s_n u_p} + E_{ir} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial^f_m u_j \partial^s_n u_p} \right) dV \quad (2.268)$$

die Elemente der tangentialen Steifigkeitsmatrix abgekürzt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung der Elemente der tangentialen Steifigkeitsmatrix entsprechend ihrer Berechnung durch vorangestellte zweifache untere und obere und nachgestellte zweifache untere Indizierung  $\frac{sf}{nm} \square_{jpp}$  mit natürlichen Zahlen  $s, f, n, m, j, p \in \mathbb{N}$  derart erfolgt, dass die inneren Indizierungen  $f, m, j$  die selben Indizierungen wie die der Element-Knotenverschiebung sind, nach der die erste Ableitung der Verzerrungsmaße gebildet wurde und die äußeren Indizierungen  $s, n, p$  die selben Indizierungen wie die der Element-Knotenverschiebung sind, nach der die zweite Ableitung der Verzerrungsmaße bei der Berechnung gebildet wurde.

Mit den eingeführten Abkürzungen erhält man aus (2.266)

$$\sum_{s=1}^9 \sum_{n=0}^d \sum_{p=1}^3 \left( \frac{sf}{nm} k_{jpp} \frac{s}{n} u_p \right) = \frac{f}{m} F_{aj} - \frac{f}{m} f_j = \frac{f}{m} F_j, \quad (2.269)$$

bzw.

$${}^e \mathbf{K}_T {}^e \mathbf{u} = {}^e \mathbf{F} \quad (2.270)$$

in matrizieller Schreibweise. Mit  ${}^e \mathbf{K}_T$  wird die tangentielle Steifigkeitsmatrix des 9-knotigen finiten Schalenelementes nach der vorgestellten einschichtigen Multidirektortheorie mit den Elementen  $\frac{sf}{nm} k_{jpp}$ , vgl. (2.268), abgekürzt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung der tangentialen Steifigkeitsmatrix eines finiten Elementes, stets durch  ${}^e\mathbf{K}_T$  mit der nachgestellten einfachen unteren Indizierung mit dem Kennzeichen „T“, das für das Wort „tangential“ steht, und durch die vorangestellte einfache obere Indizierung mit dem Kennzeichen „e“, das für das Wort „Element“ steht, erfolgt.

Der Spaltenvektor  ${}^e\mathbf{u}$  fasst alle eingeführten Freiwerte  ${}^e_l u_i$ , vgl. (2.216), des finiten Elementes zusammen. Der Spaltenvektor  ${}^e\mathbf{F}$  fasst die Differenzen  ${}^f_m F_j$ , vgl. (2.269), aus allen äußeren Knotenkräften  ${}^f_m F_{aj}$ , vgl. (2.258), und inneren Knotenkräften  ${}^f_m f_j$ , vgl. (2.267), des finiten Elementes zusammen. Die tangentiale Steifigkeitsmatrix  ${}^e\mathbf{K}_T = {}^e\mathbf{K}_T({}^e\mathbf{u})$  und der Spaltenvektor der äußeren und inneren Knotenkräfte  ${}^e\mathbf{F} = {}^e\mathbf{F}({}^e\mathbf{u})$  sind Funktionen von allen eingeführten Freiwerten  ${}^e_l u_i$ . Die Matrizen und Spaltenvektoren lassen sich mit ihren Elementen wie folgt an der Gleichung (2.269) darstellen:

$$\begin{bmatrix} {}^{11}_{00}k_{11} & {}^{11}_{00}k_{12} & {}^{11}_{00}k_{13} & {}^{11}_{10}k_{11} & \dots & {}^{21}_{00}k_{11} & \dots & {}^{s1}_{n0}k_{1p} & \dots & {}^{91}_{d0}k_{13} \\ {}^{11}_{00}k_{21} & {}^{11}_{00}k_{22} & {}^{11}_{00}k_{23} & {}^{11}_{10}k_{21} & \dots & {}^{21}_{00}k_{21} & \dots & {}^{s1}_{n0}k_{2p} & \dots & {}^{91}_{d0}k_{23} \\ {}^{11}_{00}k_{31} & {}^{11}_{00}k_{32} & {}^{11}_{00}k_{33} & {}^{11}_{10}k_{31} & \dots & {}^{21}_{00}k_{31} & \dots & {}^{s1}_{n0}k_{3p} & \dots & {}^{91}_{d0}k_{33} \\ {}^{11}_{01}k_{11} & {}^{11}_{01}k_{12} & {}^{11}_{01}k_{13} & {}^{11}_{11}k_{11} & \dots & {}^{21}_{01}k_{11} & \dots & {}^{s1}_{n1}k_{1p} & \dots & {}^{91}_{d1}k_{13} \\ \dots & \dots \\ {}^{12}_{00}k_{11} & {}^{12}_{00}k_{12} & {}^{12}_{00}k_{13} & {}^{12}_{10}k_{11} & \dots & {}^{22}_{00}k_{11} & \dots & {}^{s2}_{n0}k_{1p} & \dots & {}^{92}_{d0}k_{13} \\ \dots & \dots \\ {}^{1f}_{0m}k_{j1} & {}^{1f}_{0m}k_{j2} & {}^{1f}_{0m}k_{j3} & {}^{1f}_{1m}k_{j1} & \dots & {}^{2f}_{0m}k_{j1} & \dots & {}^{sf}_{nm}k_{jp} & \dots & {}^{9f}_{dm}k_{j3} \\ \dots & \dots \\ {}^{19}_{0d}k_{31} & {}^{19}_{0d}k_{32} & {}^{19}_{0d}k_{33} & {}^{19}_{1d}k_{31} & \dots & {}^{29}_{0d}k_{31} & \dots & {}^{s9}_{nd}k_{3p} & \dots & {}^{99}_{dd}k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1_0 u_1 \\ {}^1_0 u_2 \\ {}^1_0 u_3 \\ {}^1_1 u_1 \\ \dots \\ {}^2_0 u_1 \\ \dots \\ {}^s_n u_p \\ \dots \\ {}^9_d u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1_0 F_1 \\ {}^1_0 F_2 \\ {}^1_0 F_3 \\ {}^1_1 F_1 \\ \dots \\ {}^2_0 F_1 \\ \dots \\ {}^f_m F_j \\ \dots \\ {}^9_d F_3 \end{bmatrix} \quad (2.271)$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung von Spaltenvektoren, die alle Knotenverschiebungen bzw. inneren oder äußeren Kräfte aller Knoten des finiten Elementes zusammenfassen, stets durch die vorangestellte einfache obere Indizierung  ${}^e\mathbf{u}$  mit dem Kennzeichen „e“, das für das Wort „Element“ steht, erfolgt.

Mit den eingeführten Matrizen kann zudem eine matrizielle Formulierung der Arbeitsgleichung (2.206) wie folgt gebildet werden:

$$\delta({}^e\mathbf{u})^T {}^e\mathbf{f} + \delta({}^e\mathbf{u})^T {}^e\mathbf{K}_T {}^e\mathbf{u} - \delta({}^e\mathbf{u})^T {}^e\mathbf{F}_a = 0. \quad (2.272)$$

Die äußeren Knotenkräfte  ${}^f_m F_{aj}$ , die sowohl alle Volumen- als auch alle Referenzflächenlasten umfassen, werden dabei zur Matrix  ${}^e\mathbf{F}_a$  und die inneren Knotenkräfte  ${}^f_m f_j$  zur Matrix  ${}^e\mathbf{f}$  zusammengefasst.

### Integration.

Die Integrationen in (2.267) und (2.268) der Elemente der Matrix und Spaltenvektoren in (2.271) erfolgen numerisch nach dem Verfahren von GAUSS-LEGENDRE. Die Integranden dieser Ausdrücke, die jeweils mit  $\mathbf{I}$  bezeichnet werden, sind nichtlineare Funktionen der Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ . Mit dem differentiellen Volumenelement  $dV$  nach (2.31) können die Integrale in (2.267) und (2.268) zunächst wie folgt umgeformt und anschließend numerisch ausgewertet wer-

den:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{I}} dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^H \underline{\mathbf{I}}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mu(\Theta^3) \sqrt{A(\Theta^1, \Theta^2)} d\Theta^3 d\Theta^2 d\Theta^1 \\ &= \sum_{x=1}^{n_i} \sum_{y=1}^{n_i} \sum_{z=1}^{n_i} \left( \left( \underline{\mathbf{I}} \mu \sqrt{A} \right) \Big|_{\Theta^1=i_x, \Theta^2=i_y, \Theta^3=j_z} \varkappa_x \varkappa_y \varkappa_z \frac{H}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.273)$$

Dabei wird die Summation über  $(n_i)^3$  sogenannte Stützstellen  $i_x$ ,  $i_y$  und  $j_z$  mit den Wichtungsfaktoren  $\varkappa_x$ ,  $\varkappa_y$  und  $\varkappa_z$  erstreckt. Geht man von  $n_i = 3$  Stützstellen für eine Richtung aus, wird ein Polynom von höchstens der Ordnung  $(2n_i - 1) = 5$  exakt integriert. Für die Integrationsbereiche  $-1, 0 \leq \Theta^1 \leq 1, 0$  und  $-1, 0 \leq \Theta^2 \leq 1, 0$ , für welche die Stützstellen standardmäßig angegeben werden, ist bei  $n_i = 3$  Stützstellen für jede Richtung an den Stellen

$$i_1 = -0,7745966692, \quad i_2 = 0,0, \quad i_3 = 0,7745966692 \quad (2.274)$$

jeweils der Gewichtungsfaktor

$$\varkappa_1 = 0,5555555555, \quad \varkappa_2 = 0,8888888888, \quad \varkappa_3 = 0,5555555555 \quad (2.275)$$

anzuwenden. Der Integrationsbereich  $0 \leq \Theta^3 \leq H$  wird für die Integration in den Bereich  $-1, 0 \leq \Theta_t^3 \leq 1, 0$  abgebildet. Es entstehen die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \Theta^3 &= \Theta^3(\Theta_t^3) = \frac{H}{2}(\Theta_t^3 + 1) \\ \frac{d\Theta^3}{d\Theta_t^3} &= \frac{H}{2}, \quad d\Theta^3 = \frac{H}{2}d\Theta_t^3. \end{aligned} \quad (2.276)$$

Für den Integrationsbereich in Dickenrichtung ergeben sich damit folgende Werte für die Stützstellen  $j_z$ :

$z$	$i_z = \Theta_t^3$	$j_z = \Theta^3(\Theta_t^3) H^{-1}$	$\varkappa_z$
1	-0,7745966692	0,1127016654	0,5555555555
2	0,0	0,5	0,8888888888
3	0,7745966692	0,8872983346	0,5555555555

(2.277)

#### 2.9.4 Verknüpfung des Schalenelementes mit Kontaktelementen

Dieser Abschnitt widmet sich dem Einsatz der bisher im Abschnitt 2 dargelegten oberflächenorientierten Einschichten-Schalentheorie und des zugehörigen finiten Einschichten-Schalenelementes bei Kontaktproblemen. Die Berücksichtigung der aus der Kontaktmechanik bekannten Kontaktbedingungen in der Elementsteifigkeitsmatrix eines finiten Mehrschichten-Schalenelementes wird Gegenstand des später folgenden Abschnittes 4.4 sein. Um Kontaktprobleme bei gleichzeitigem Einsatz des dargelegten finiten Einschichten-Schalenelementes nach Abschnitt 2.9 und anderer Elementtypen, die nicht Bestandteil dieser Arbeit sind, z. B. Volumenelemente, behandeln zu können, müssen alle im Problem benutzten Elemente, die potenziell Kontakt mit anderen haben können, mit sogenannten „Kontaktelementen“ überzogen werden. Zur Herleitung einer tangentialen Steifigkeitsmatrix eines finiten Kontaktelementes für Normalkontakt und Tangentialkontakt sei

auf [LAURSEN 2002], [WRIGGERS 2001], [WILLNER 2003] verwiesen. Dort wird für diese beiden Anteile eine konsistente Linearisierung der Kontaktarbeiten vorgenommen.

Als Kontaktelement soll im Sinne der Methode der finiten Elemente ein Element verstanden werden, das keine Dicke besitzt, die Oberfläche beider Kontaktpartner überzieht, und zwar in der gleichen Knotenanordnung wie die die Kontaktpartner repräsentierenden Elemente. Es stellt nur die Steifigkeiten, die aus den Kontaktbedingungen resultieren, bei der Berührung der Kontaktpartner zur Verfügung. Ein mit Volumenelementen vernetzter in Kontakt befindlicher Körper lässt sich mit diesen Kontaktelementen leicht überziehen, da sich stets Knoten der Elemente an der Oberfläche der vernetzten Körper befinden.

Oberflächenorientierte finite Schalenelemente zeichnen sich gegenüber mittelflächenorientierten finiten Schalenelementen dadurch aus, dass sie die Knotenpunkte ebenfalls an der Oberfläche der vernetzten Körper besitzen, vgl. dazu die Geometrie der oberflächenorientierten Schalentheorie in Abschnitt 2.2.

Mittelflächenorientierte finite Schalenelemente sind unter bestimmten Anforderungen entweder gar nicht oder nur schwierig in Kontaktproblemen einsetzbar. Selbst wenn man einmal die Einhaltung einer exakten Geometrie vernachlässigte und die Kontaktelemente bei mittelflächenorientierten finiten Schalenelementen an der Mittelfläche, also innerhalb der Schale anordnete, um dort die Kontaktbedingungen näherungsweise zu erfüllen, bestünde die Schwierigkeit der Zuordnung der durch die Kontaktelemente ermittelten Steifigkeiten für tangentialen Verschiebungsfreiheitsgrade. Reibungskräfte auf der Schalenoberfläche infolge Kontakt z. B. müssen in Folge des Abstandes zur Mittelfläche ein Moment bezüglich der Mittelfläche verursachen. Um das zu gewährleisten, müsste für eine Transformation innerhalb der Kontaktelemente die Dicke des jeweils zugehörigen mittelflächenorientierten Schalenelementes bekannt sein. Eine Verknüpfung seitens der Kinematik von Kontaktelement und Schalenelement wäre hier unumgänglich.

Mit Hilfe oberflächenorientierter Schalentheorien kann die Zuordnung der Kontaktelemente in gleicher Weise erfolgen wie bei Volumenelementen, da hier nur den drei Verschiebungen der Schalenreferenzfläche zugeordnete Steifigkeiten berechnet werden müssen. Die Kinematiken sowohl des Kontaktelementes als auch des Schalenelementes werden auf die Ausmessungen durch das Basissystem der Schale und das Basissystem des Kontaktelements bezogen. Der Versatz von Reibungskräften gegenüber der Schalenmitte wird wegen der oberflächenorientierten Kinematik richtig berücksichtigt.

## 2.10 Geschlossener Ring unter gleichmäßiger Normalbelastung – Numerisches Beispiel

Die Eigenschaften hinsichtlich der Güte der Approximation des Spannungszustandes der in den vorangegangenen Abschnitten eingeführten Multidirektor-Schalentheorie und der beschriebenen FE-Umsetzung sollen anhand einer Simulation aufgezeigt werden, für die in [GIRKMANN 1963] analytische Berechnungen durchgeführt wurden, die als Vergleich dienen.

Am Scheibenrand  $r = b$  der in Abb. 2.17(a) dargestellten, in den Polarkoordinaten  $r, \varphi$  ausgemessenen Scheibe der Dicke  $h$  wirkt die Belastung  $p$ . Diese Belastung ruft einen drehsymmetrischen Spannungszustand hervor. In [GIRKMANN 1963] wird der Spannungsverlauf

$$\sigma_r = -\frac{p}{h} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (2.278)$$

für die Spannungen in Radialrichtung und

$$\sigma_\varphi = -\frac{p}{h} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (2.279)$$

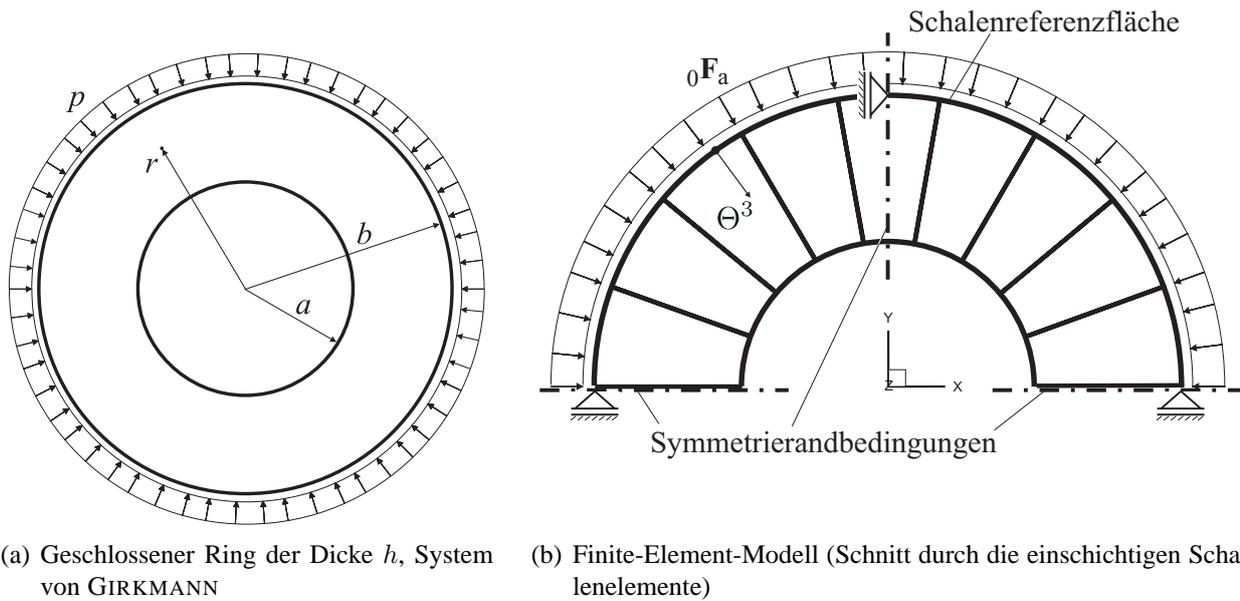


Abbildung 2.17: Geschlossener Ring unter gleichmäßig verteilter Normalbelastung

für die Spannungen in Ringrichtung angegeben, wobei der auftretende Spannungszustand als ein ebener unter Voraussetzung einer kleinen Scheibendicke  $h$  angenommen wurde. In Abb. 2.17(a) ist der Fall  $b = 2a$  dargestellt, der nachfolgend berechnet wurde.

Für die Finite-Element-Simulation wird ein Bogenausschnitt mit  $\alpha = 180^\circ$  und  $a = 2,5\text{ m}$ ,  $b = 5,0\text{ m}$ ,  $h = 3,0\text{ m}$  gewählt, s. Abb. 2.17(b). Die Scheibendicke ist damit nicht verhältnismäßig klein. Dieser wird mit 9 einschichtigen Schalenelementen vernetzt. Die Lage der Schalenreferenzfläche ist bei  $r = b$  an der Ringaußenseite. Die Wahl des Materials, Isotropie vorausgesetzt, hat keinen Einfluss auf die zu ermittelnden Spannungszustände. Die Querdehnzahl wurde  $\nu = 0$  gewählt. Der Bogen ist in den durch die Strich-Punkt-Linie in Abb. 2.17(b) gekennzeichneten Querschnitten radial-verschieblich durch Symmetrierandbedingungen gelagert. Für die Belastung wird  $p = 3\text{ kN/m}$  gewählt, so dass das Lastvektorfeld (2.155)  ${}_0\mathbf{F}_a\text{ kN/m}^2 = 1\text{ kN/m}^2\mathbf{A}_3$  trägt. Innerhalb der Schicht wird ein Ansatz mit 3 Direktoren gewählt ( $d = 3$  in (2.44)), um die analytisch ermittelten Spannungsverläufe insbesondere in die Schalendickenrichtung so gut wie möglich erhalten zu können. Der Spaltenvektor der Direktorkräfte (2.165) ergibt sich nach der Berechnungsvorschrift (2.167) zu (2.175). Die in (2.167) vorkommende Determinante  $\mu$  des Schalensors gehört zur Integration über die zur Schalenreferenzfläche parallelen Flächen und ist für die hier vorliegende Referenzflächenlast ohne Einfluss.

Die Randwerte der Spannungskomponente  $\sigma_\varphi$  ergeben sich an den Laibungen für den Fall  $b = 2a$  nach (2.279) wie folgt:

$$\sigma_\varphi|_{r=a} = -2,666\text{ kN/m}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_\varphi|_{r=b} = -1,666\text{ kN/m}^2. \quad (2.280)$$

Die Randwerte der Spannungskomponente  $\sigma_r$  ergeben sich an den Laibungen für den Fall  $b = 2a$  nach (2.278) zu:

$$\sigma_r|_{r=a} = 0\text{ kN/m}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_r|_{r=b} = -1,0\text{ kN/m}^2. \quad (2.281)$$

In Abb. 2.18 ist der Verlauf der Spannungskomponenten  $\sigma_r$  und  $\sigma_\varphi$ , als Ergebnis einer geometrisch nichtlinearen Finite-Element-Berechnung abgebildet. In Abb. 2.18(a) ist die Spannung  $\sigma_\varphi = \sigma_m^{11}$ ,

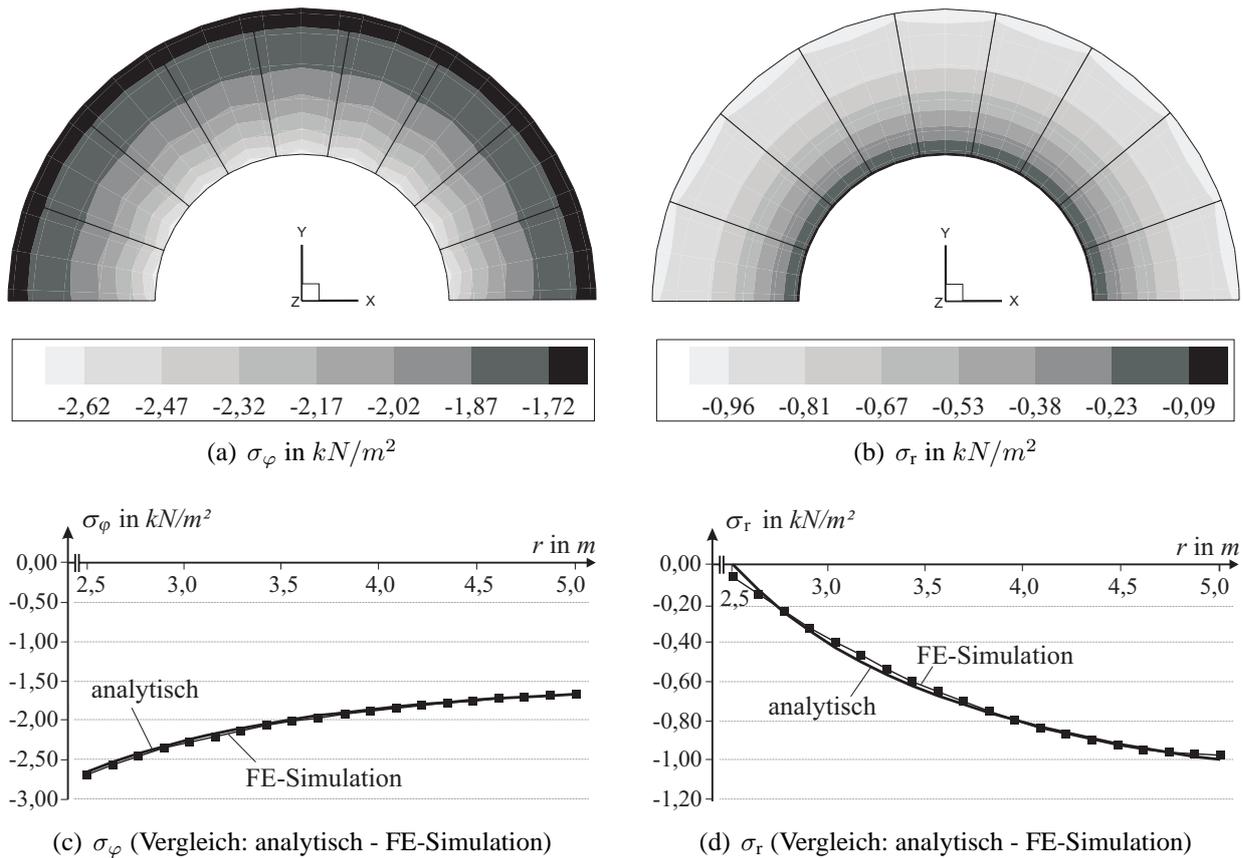


Abbildung 2.18: Geschlossener Ring unter gleichmäßig verteilter Normalbelastung - Spannungen

vgl. (2.107), in Umlaufrichtung und in Abb. 2.18(b) die Spannung  $\sigma_r = \sigma_m^{33}$ , vgl. (2.107), in Radialrichtung dargestellt. Ein Vergleich dieser errechneten Spannungen mit den analytisch nach (2.278) und (2.279) ermittelten wird in Abb. 2.18(c) und Abb. 2.18(d) vorgenommen, wobei die durch die FE-Simulation erhaltenen Spannungsverläufe jeweils durch die Linien mit Quadratsymbolen repräsentiert werden. Beide Spannungsponenten werden bereits bei Verwendung von nur 9 einschichtigen Schalenelementen mit guter Übereinstimmung zur analytischen Lösung erhalten.

### 3 Mehrschichten-Schalentheorie

#### 3.1 Modellbildung

Durch nachträgliches Aufbringen von Textilbeton auf eine Konstruktion aus stahlbewehrtem Altbeton - die Materialkombination, auf die in dieser Arbeit besonderes Augenmerk gelegt wird - erhält das Flächentragwerk hinsichtlich der Materialeigenschaften eine in mehrfacher Hinsicht geschichtete Struktur, die durch das mechanische Modell erfasst werden muss. In [SCHULTZ 1996] werden auch für stahlbewehrten Beton wegen der flächenhaften Struktur von z. B. Bewehrungsmatten Eigenschaften herausgearbeitet, welche die Erfassung durch Mehrschichtenmodelle nahelegt. Für die Einteilung in Schichten, denen jeweils ein eigenes Materialgesetz zugeordnet wird, sind verschiedene Herangehensweisen denkbar.

1. Es besteht zum Einen die Möglichkeit, die Grundkonstruktion aus Altbeton als eine erste Schicht und die nachträglich aufgebraachte Verstärkung aus textilbewehrtem Feinbeton

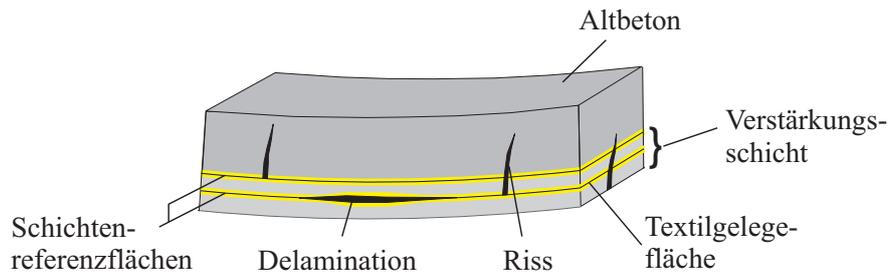


Abbildung 3.1: Möglichkeit einer Schichtung der Schale und Schichtenreferenzflächen (Interfaces)

als Ganzes als eine zweite Schicht aufzufassen. Die Fläche des Übergangs zwischen diesen Schichten, das sogenannte Interface, kann wegen des Materialwechsels von Altbeton zu Feinbeton sowohl aus herstellungsbedingten Gründen (schlechter Verbund) als auch aus Gründen unterschiedlicher Eigenschaften der einzelnen Materialien bei gutem Verbund eine Schwachstelle für das Verbundverhalten darstellen. Unterschiedliche Querkontraktionen aneinander grenzender Schichten unterschiedlichen Materials verursachen bereits bei einaxialer Belastung Schubspannungen, welche die Kompatibilität an der Grenzfläche erhalten, vgl. Abb. 3.2. Erreichen die vorhandenen die maximal aufnehmbaren Spannungen der Ma-

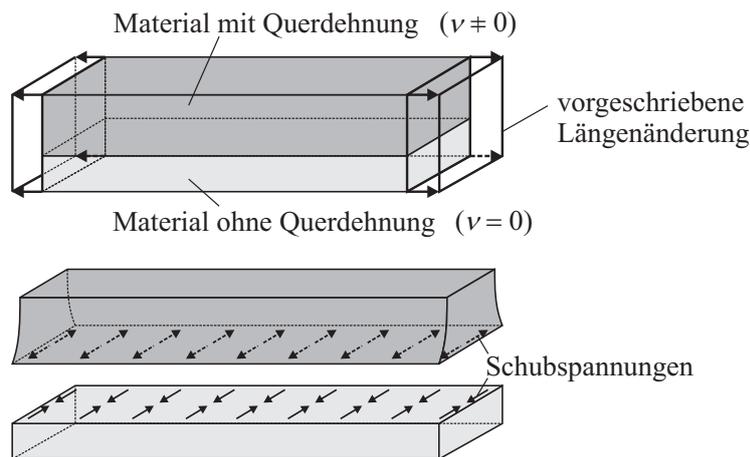


Abbildung 3.2: Schubspannungen durch unterschiedliche Querkontraktionen aneinander grenzender Schichten unterschiedlichen Materials bei Längsdehnung

terialien, kommt es an dieser Stelle zur flächigen Ablösung ähnlich der Delamination von Schichten eines Laminates. Versuche im Sonderforschungsbereich 528, TP C1 haben jedoch gezeigt, dass bei gründlicher Aufbereitung der Oberfläche des Altbetons der Verbund in dieser Fläche sehr gut gewährleistet werden kann, vgl. [CURBACH 2003]. Wenn dies beim späteren praktischen Einsatz des textilverstärkten Betons durch entsprechende Herstellungstechnologien ebenfalls sichergestellt werden kann, wovon ausgegangen wird, treten andere mögliche Versagensflächen im Inneren der Verstärkungsschicht in den Mittelpunkt des Interesses. Denn bei detaillierterer Betrachtung der Verstärkungsschicht ist diese wegen des lagenweisen Aufbringens der textilen Gelege selbst eine geschichtete Struktur.

Wird die Verstärkungsschicht dennoch als Ganzes, ohne die Lagen der textilen Gelege genau zu berücksichtigen, mit einem verschmierten Material dargestellt, sollte das zugehörige Materialgesetz die Eigenschaften der geschichteten Struktur im Inneren der Verstärkungsschicht annähernd verkörpern. Dann ließe sich die Fläche, in der potenziell flächiges Versagen ein-

treten kann, im Modell vereinfachend in das Interface zwischen Alt- und Neukonstruktion legen. Das hieße, dass flächiges Versagen, ungeachtet in welcher Lage innerhalb der Dickenrichtung der Schale es tatsächlich auftritt, im Modell stets im Interface zwischen Alt- und Neukonstruktion angenommen würde. Diese Annahme kann im Sinne der Steigerung der Effizienz der Berechnung im Rahmen der Finite-Element-Methode (FEM) dann getroffen werden, wenn durch ein leistungsfähiges Materialgesetz eine Annäherung der Ergebnisse an die eines feiner gegliederten, also mehrschichtigen Schalenmodells erreicht wird.

Diese Herangehensweise führt auf ein Zweischichtenmodell. Die Zahl der Freiheitsgrade kann wegen geringer Schichtenanzahl so für den Einsatz in der Praxis niedrig gehalten werden. Die später in Abschnitt 5 vorgestellten numerischen Beispiele basieren bereits alle auf der o. g. Annahme, obwohl dort für die Verstärkungsschicht im Rahmen dieser Arbeit nur ein linear elastisches, orthotropes Material verwendet wird.

2. Zum Anderen ist, wie oben erwähnt, auch die getrennte Erfassung einzelner Schichten innerhalb der Verstärkungsschicht selbst, vgl. Abb. 3.1, möglich. Die textilen Gelege innerhalb des Feinbetons wirken zwar nicht als eine Art Trennschicht zwischen einzelnen Feinbetonschichten, da der Beton diese Schichten zwischen den Rovings ausreichend durchdringt, stellen aber, da sie dicht aufeinandergelegt sind, selbst eine dünne Schicht mit anderen Materialeigenschaften als deren Umgebung dar. Für das mechanische Modell können der Beton in den Textilzwischenräumen und die Fasern innerhalb der Gelegesicht zu einer Schicht mit neuen homogenisierten Materialeigenschaften verschmiert werden. Man erhält an den Übergängen zu dieser angenommenen Schicht einen Wechsel der Materialeigenschaften, wenn man die Dickenrichtung der gesamten Verstärkungsschicht entlanggeht. Die unterschiedlichen Querkontraktionen der unterschiedlichen Materialien verursachen bereits bei einaxialer Belastung Schubspannungen, welche die Kompatibilität an der Grenzfläche erhalten. Diese allein können bereits zum flächigen Ablösen des Feinbetons von der Gelegefläche führen. Außerdem lassen sich Zugspannungen senkrecht zum Roving zwischen dem Feinbeton und dem Roving nur sehr schlecht übertragen. Dem Feinbeton steht also in dieser Ebene nur eine um den Faseranteil reduzierte Fläche zur Zugspannungsübertragung senkrecht zur Textilebene zur Verfügung. Die jeweils an den Fasern vorhandene Kerbspannungswirkung kann bei steigender Beanspruchung sich von diesen Stellen hin zu jeweils benachbarten Kerben „parallel“ zur Schalenreferenzfläche ausbreitende Risse verursachen, was entweder bereits allein oder insbesondere mit o. g. Schubspannungswirkung wiederum zum flächigen Ablösen des Feinbetons von der Gelegefläche führen kann.

Diese Herangehensweise kann z. B. auf ein Vierschichtenmodell führen, in dem die erste Schicht die Grundkonstruktion, die zweite Schicht der erste Teil der Feinbetonschicht, die dritte Schicht eine dünne Schicht, in der sich die Textilgelegefläche befindet, und die vierte Schicht der zweite Teil der Feinbetonschicht ist. Ein Dreischichtenmodell kann man erhalten, indem man die eben genannte dünne dritte Schicht zusammen mit der zweiten oder vierten als eine Schicht mit entsprechend verschmierten Materialeigenschaften modelliert.

Die Zerstörung eines Flächentragwerks durch das flächige Versagen, vgl. in Abb. 3.3 (links) zusammen mit Abb. 1.1 in Versuchen des Teilprojektes D1 des Sonderforschungsbereiches 528 an textilbetonverstärkten Plattenbalken, ist damit grundsätzlich von Bedeutung und wegen ihrer geometrischen Determiniertheit eine das mechanische Modell maßgebend beeinflussende Versagensart. Die Lage des Auftretens der flächigen Ablösung innerhalb der Schalendicke variiert jedoch. Bei Bauteilen aus Holz-Textilverbunden, s. in Abb. 3.3 (rechts), in Versuchen des Teilprojektes C5 des Sonderforschungsbereiches 528, ist diese Versagensart die am häufigsten auftretende, wobei

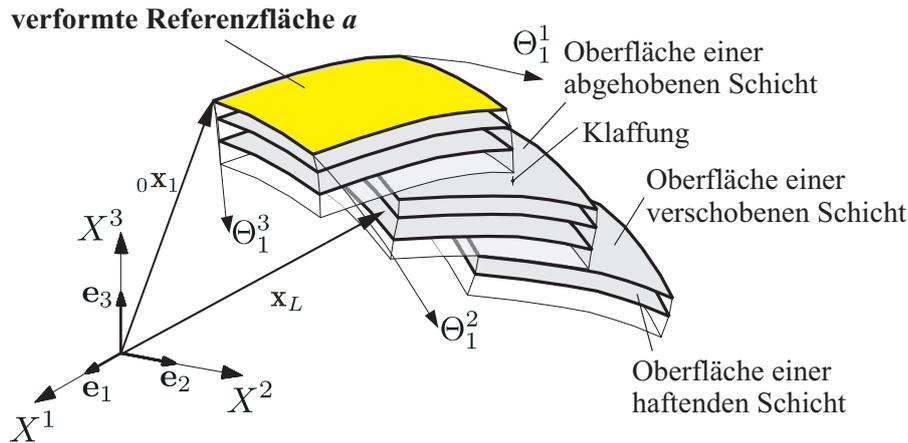


Abbildung 3.3: Delamination; links: an einem textilbewehrten Stahlbeton-Plattenbalken, rechts: an einer textilbewehrten Holz-Leiste

sich hier die Fläche des Versagens wegen der relativ zum Bauteil geringen Dicke der Verstärkungsschicht vorausbestimmen lässt.

Zur numerischen Simulation dieses Verhaltens wird die Entwicklung von oberflächenorientierten Multidirektor-Mehrschichten-Schalentheorien und zugehörigen finiten Elementen mit integrierten Kontaktbedingungen zur Beschreibung des Schichtenverbundes und zur Erfassung der Schädigungsart Delamination mit Beschreibung deren Fortschreitens vorgenommen, vgl. [ZASTRAU et al. 2003]. Im Unterschied zu herkömmlichen Kinematiken, vgl. z. B. [BAŞAR et al. 1997], bei denen alle Schichten jederzeit fest miteinander verbunden und die Freiheitsgrade der einzelnen Schichten gekoppelt sind, können die Freiheitsgrade der einzelnen Schichten innerhalb dieses Mehrschichten-Schalenmodells ggf. entkoppelt sein, vgl. dazu das in Abb. 3.4 dargestellte kinematische Modell der Schalentheorie mit mehreren Schichten eines Elementes, die sich in beliebigen Zuständen in unterschiedlichen Positionen zueinander befinden können. Bei diesem Modell wird davon ausgegangen, dass sich im Ausgangszustand die Schichten – im einfachsten Fall also zwei, nämlich Grundmaterial und Textilbetonverstärkung – im Verbund miteinander befinden. Das wird durch eine entsprechende Kinematik gewährleistet, die keine Freiheitsgrade für Relativverschiebungen zwischen den Schichten besitzt.

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Einführung der Mehrschichtentheorie so vorzunehmen, dass die numerische Umsetzung hinsichtlich der geforderten Flexibilität in einer anschließenden Erweiterung einfach gestaltet werden kann.

Abbildung 3.4: Mehrschichten-Schalenkinematik mit nur teilweiser  $C^0$ -Stetigkeit

## 3.2 Analogie zur Einschichtentheorie

### 3.2.1 Geometrie eines differentiellen Mehrschichten-Elementes

Es wird nun ein dreidimensionaler unverformter Schalenkörper  $\hat{\mathcal{B}}$  betrachtet, der aus den Teilkörpern  $\mathcal{B}_L$  ( $L = 1, \dots, n_s$ ), die Schichten genannt werden, besteht. Die Anzahl der Schichten ist dabei  $n_s$ . Die Schichten sind wiederum in den in Abschnitt 2.2 vorgestellten Raum  $\mathbb{R}^3$  eingebettet, zusammenhängend und jeweils durch die Schichten-Schalenlaibungen und die Schichten-Schalenberandung begrenzt. Das in Abschnitt 2.2.1 eingeführte raumfeste kartesische Koordinatensystem mit den Koordinaten  $X^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und dem Basissystem  $\{\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i; i = 1, 2, 3\}$  bleibt bestehen.

#### Koordinatenlinien und Ortsvektoren der Schichten.

Zur Beschreibung der Differentialgeometrie jeder unverformten Schalenschicht  $\mathcal{B}_L$  wird eine Parametrisierung durch krummlinige, konvektive Koordinaten  $\Theta_L^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) eingeführt, vgl. Abb. 3.5.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung aller skalaren, vektoriellen bzw. tensoriellen und matriziellen Größen sowie Punkte und Mengen, die zur Schicht  $\mathcal{B}_L$  gehören, stets durch die nachgestellte einfache untere Indizierung  $\square_L$  mit einer natürlichen Zahl  $L \in \mathbb{N}$  erfolgt, die gegebenenfalls auch zusätzlich neben anderen Indizierungen an dieser Stelle, jedoch immer als letzte Indizierung  $\square_{\square_L}$  von mehreren in der Reihe aber immer vor der Kennzeichnung einer ggf. vorhandenen partiellen Ableitung steht.

Die Koordinatenlinie  $\Theta_1^3$  der ersten Schicht verläuft im unverformten Zustand entlang einer Geraden orthogonal zur Schalenreferenzfläche

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \quad (3.1)$$

der ersten Schicht und ist über die Gesamtdicke der mehrschichtigen Schale im Intervall

$$0 \leq \Theta_1^3 \leq \sum_{L=1}^{n_s} H_L \quad (3.2)$$

definiert, wobei  $H_L = H_L(\Theta^1, \Theta^2) = \{H_L^*\}$  der dimensionslose Wert der entlang der Referenzfläche geringfügig veränderlichen Schichtendicke  $H_L^* = \{H_L^*\} [H_L^*]$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  ist. Sie hat ihren Ursprung in der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$ .

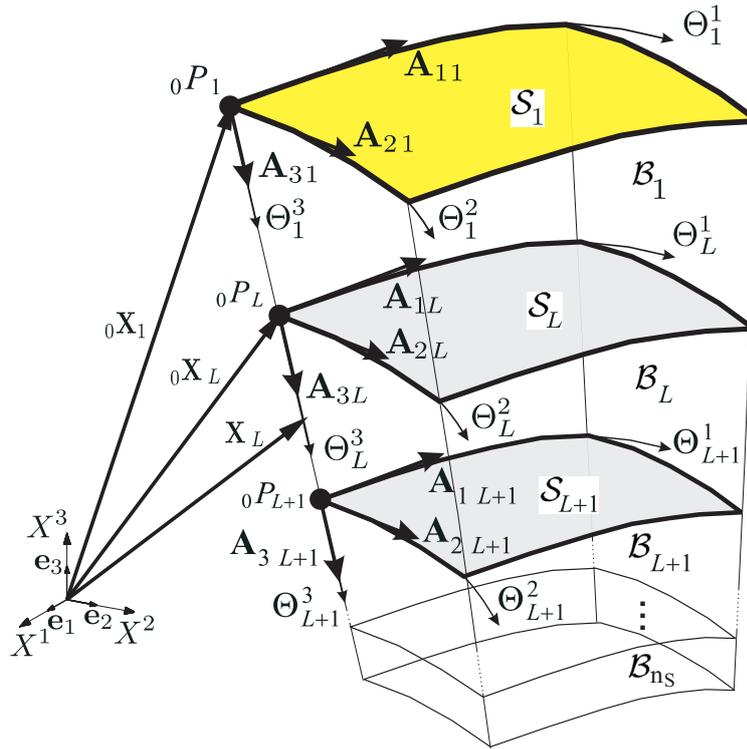


Abbildung 3.5: Differentialgeometrie des unverformten Mehrschichten-Schalenkörpers  $\mathcal{B}$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Beschreibung der Differentialgeometrie der ersten Schicht des Schalenkörpers, also des Teilkörpers

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}, \tag{3.3}$$

vollständig der des in Abschnitt 2.2 behandelten einschichtigen Schalenkörpers  $\mathcal{B}$  entspricht, so dass alle differentialgeometrischen Größen dieser Schicht - abgesehen vom Wertebereich der Koordinatenlinie  $\Theta_1^3$  nach (3.2) - durch nachgestellte einfache untere Indizierung  $\square_1$  der Größen der Einschichten-Schalentheorie erhalten werden können.

Die Koordinatenlinien  $\Theta_L^3$  für  $L > 1$  werden im Unterschied zu  $\Theta_1^3$  nur innerhalb von  $\mathcal{B}_L$  benötigt und verlaufen im unverformten Zustand entlang einer Geraden orthogonal ebenfalls zur Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$  der ersten Schicht und sind im Intervall

$$0 \leq \Theta_L^3 \leq H_L \tag{3.4}$$

definiert. Sie haben ihren Ursprung in der Schichtenreferenzfläche  $\mathcal{S}_L$ . Das heißt, die Koordinatenlinien  $\Theta_L^3$  für  $L > 1$  verlaufen im unverformten Zustand entlang der Koordinatenlinie  $\Theta_1^3$ . Stark veränderliche Schichtendicken sollen nicht zugelassen werden, womit gewährleistet ist, dass die Koordinatenlinien  $\Theta_L^3$  für  $L > 1$  im unverformten Zustand auch annähernd orthogonal und  $\Theta_L^\alpha$  annähernd parallel zur jeweiligen Schichtenreferenzfläche  $\mathcal{S}_L$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  verlaufen, da für die Ermittlung aller Größen im unverformten Zustand

$$\begin{aligned} \Theta_L^\alpha &\parallel \mathcal{S}_1 \quad \text{und} \quad \Theta_L^\alpha = \Theta_1^\alpha \\ \Theta_L^3 &\perp \mathcal{S}_1 \quad \text{und} \quad \Theta_L^3 \parallel \Theta_1^3 \end{aligned} \tag{3.5}$$

vorausgesetzt werden soll. Die Beschreibung der Differentialgeometrie der Schicht  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  erfolgt analog der des in Abschnitt 2.2 behandelten einschichtigen Schalenkörpers. Die entsprechenden Größen der Mehrschichten-Schalentheorie werden durch nachgestellte einfache untere

Indizierung  $\square_L$  der Größen der Einschichten-Schalentheorie erhalten, wenn zudem an Stelle der Koordinate  $\Theta^3$  der Einschichten-Schalentheorie - außer in der nur innerhalb einer Schicht zu verwendenden Basisfunktion (2.17) und anderen Operatoren innerhalb der Schicht - die Koordinate

$$\Theta_1^3(\Theta_L^3) = \begin{cases} \Theta_L^3 & \text{für } L = 1 \\ \sum_{K=1}^{L-1} H_K + \Theta_L^3 & \text{für } L > 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

und an Stelle der Koordinaten  $\Theta^\alpha$  der Einschichten-Schalentheorie die Koordinaten  $\Theta_L^\alpha$  in die Beziehungen eingesetzt werden. Der Ortsvektor zu einem materiellen Punkt  $P_L$  in  $\mathcal{B}_L$  ist demnach analog (2.2) durch

$$\mathbf{X}_L = X^i(\Theta_L^1, \Theta_L^2, \Theta_1^3(\Theta_L^3)) \mathbf{e}_i \quad (3.7)$$

und der Ortsvektor zu einem materiellen Punkt  ${}_0P_L$  in  $\mathcal{S}_L$  analog (2.4) durch

$${}_0\mathbf{X}_L = X^i(\Theta_L^1, \Theta_L^2, \Theta_1^3(\Theta_L^3))|_{\Theta_L^3=0} \mathbf{e}_i \quad (3.8)$$

eingeführt.

#### Verbundzustand in der Ausgangskonfiguration.

Zwischen den Schichten wird ein sogenannter Verbundzustand eingeführt. Die Schichten sind im unverformten Zustand stets fest miteinander verbunden. Die Referenzfläche aller Schichten  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$ , die durch die Ortsvektoren (3.8) zu allen Punkten  ${}_0P_L$  in  $\mathcal{S}_L$  beschrieben wird, ist mit der Laibung der Schicht  $\mathcal{B}_{L-1}$ , die der Referenzfläche der Schicht  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  gegenüberliegt, identisch, so dass in jedem Punkt  ${}_0P_L$  in  $\mathcal{S}_L$  für  $L > 1$  gilt:

$${}_0\mathbf{X}_L = \mathbf{X}_{L-1}|_{\Theta_{L-1}^3=H_{L-1}} \cdot \quad (3.9)$$

#### Basissystem und Geometrie innerhalb der Schicht.

Das Basissystem der Schichtenreferenzfläche wird analog (2.5) durch

$$\mathbf{A}_{iL} = \mathbf{X}_{L,i}|_{\Theta_L^3=0} \quad (3.10)$$

erhalten, wobei unter den Voraussetzungen (3.5) durch nachgestellte Indizierung  $\square_{,i}$  weiterhin die partielle Ableitung nach den Koordinaten  $\Theta_L^i$  gekennzeichnet wird, die der partiellen Ableitung nach den Koordinaten  $\Theta^i$  gleich ist. Der Ortsvektor  $\mathbf{X}_L$  der Schicht wird analog (2.18) und (2.19) mit dem Schichten-Referenzflächen-Ortsvektor und den Direktoren

$${}_0\mathbf{X}_L; \quad {}_1\mathbf{X}_L = \mathbf{A}_{3L}; \quad {}_2\mathbf{X}_L = {}_3\mathbf{X}_L = \dots = {}_{d_L}\mathbf{X}_L = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

durch

$$\mathbf{X}_L(\Theta_L^1, \Theta_L^2, \Theta_L^3) = \sum_{l=0}^{d_L} ({}_l\Omega_L(\Theta_L^3) {}_l\mathbf{X}_L(\Theta_L^1, \Theta_L^2)) = {}_0\mathbf{X}_L + \Theta_L^3 \mathbf{A}_{3L} \quad (3.12)$$

innerhalb der Schicht beschrieben. Dabei ist  $d_L$  die Anzahl der Direktoren  ${}_l\mathbf{X}_L$  ( $l = 1, \dots, d_L$ ) der Schicht  $\mathcal{B}_L$  und  ${}_0\mathbf{X}_L$  der Ortsvektor. Es ist besonders darauf zu achten, dass das Funktionensystem

$${}_l\Omega_L(\Theta_L^3) = (\Theta_L^3)^l, \quad (3.13)$$

analog (2.17) als Basisfunktion der Schicht bezeichnet, in der Approximation (3.12) die geometrische Beschreibung des Schalenkontinuums in Dickenrichtung innerhalb der Schicht  $\mathcal{B}_L$  ermöglicht und deshalb direkt abhängig von der Dickenkoordinate  $\Theta_L^3$  - nicht von (3.6) - ist.

Des Weiteren ist bei der Berechnung des Schalentensors

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_L &= \mu_{iL}^j \mathbf{A}_{jL} \otimes \mathbf{A}_L^i \\ &= (\delta_\alpha^\lambda - \Theta_L^3 B_{\alpha L}^\lambda) \mathbf{A}_{\lambda L} \otimes \mathbf{A}_L^\alpha + \mathbf{A}_{3L} \otimes \mathbf{A}_L^3\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\mu_L = \det \boldsymbol{\mu}_L \quad (3.15)$$

als Operator innerhalb der Schicht, mit dem das differentielle Volumen

$$dV_L = \mu_L \sqrt{A_L} d\Theta_L^1 d\Theta_L^2 d\Theta_L^3 \quad (3.16)$$

der Schicht aus der Determinante  $A_L$  des Metrikensors der Schichtenreferenzfläche zu berechnen ist, darauf zu achten, dass dieser ebenfalls direkt abhängig von der Dickenkoordinate  $\Theta_L^3$  der Schicht ist. Der Schalentensor  $\boldsymbol{\mu}_L$ , der den Bezug der differentialgeometrischen Größen der Schicht  $\mathcal{B}_L$  auf die Schichtenreferenzfläche der selben Schicht herstellt, wird später nicht mehr verwendet und dient hier nur zum besseren Verständnis der analogen Darstellung dieser Größe zu der der Einschichtentheorie in (2.29).

### Bezug zur Schalenreferenzfläche.

Durch den Schalentensor

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \mu_i^j \mathbf{A}_{j1} \otimes \mathbf{A}_1^i \\ &= (\delta_\alpha^\lambda - \Theta_1^3 (\Theta_L^3) B_\alpha^\lambda) \mathbf{A}_{\lambda 1} \otimes \mathbf{A}_1^\alpha + \mathbf{A}_{31} \otimes \mathbf{A}_1^3\end{aligned}\quad (3.17)$$

$$\mu = \det \boldsymbol{\mu} \quad (3.18)$$

wird der Bezug der differentialgeometrischen Größen der Schicht  $\mathcal{B}_L$  auf die Schichtenreferenzfläche (3.1) der Schicht  $\mathcal{B}_1$ , also auf die Schalenreferenzfläche, hergestellt. Somit kann insbesondere das differentielle Volumen

$$dV_L = \mu \sqrt{A} d\Theta_1^1 d\Theta_1^2 d\Theta_L^3 \quad (3.19)$$

der Schicht  $\mathcal{B}_L$  aus der Determinante  $A_1 = A$  des Metrikensors der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$  berechnet werden. Da neben der Koordinatenlinie  $\Theta_1^3$  auch die Basen  $\mathbf{A}_1^i$  und  $\mathbf{A}_{j1}$  mit den nicht durch den Schichtenindex der ersten Schicht indizierten Größen direkt verglichen werden können, ist auch der Schalentensor (3.17) mit dem der Einschichtentheorie in (2.29) direkt vergleichbar.

### 3.2.2 Schalenkinematik einer Schicht

Die Mehrschichtenkinematik wird analog der in Abschnitt 2.3 vorgestellten Einschichtenkinematik entwickelt. Der Ortsvektor

$$\mathbf{x}_L(\Theta_L^1, \Theta_L^2, \Theta_L^3) = \sum_{l=0}^{d_L} ({}_l\Omega_L(\Theta_L^3) {}_l\mathbf{x}_L(\Theta_L^1, \Theta_L^2)) \quad (3.20)$$

der Schicht  $\mathcal{B}_L$  im verformten Zustand wird analog (2.34) bzw. (3.12) gebildet, so dass analog (2.42) der Verschiebungsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L(\Theta_L^1, \Theta_L^2, \Theta_L^3) &= \mathbf{x}_L - \mathbf{X}_L \\ &= \sum_{l=0}^{d_L} ({}_l\Omega_L(\Theta_L^3) {}_l\mathbf{u}_L(\Theta_L^1, \Theta_L^2)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

aus der Differenz der Ortsvektoren der verformten und unverformten Konfiguration der Schicht mit den Verschiebungen der Direktoren

$${}_l\mathbf{u}_L = {}_l u_{iL} \mathbf{e}^i = {}_l u_L^i \mathbf{e}_i = {}_l \bar{u}_{jL} \mathbf{A}_L^j = {}_l \hat{u}_L^k \mathbf{G}_{kL} \quad (3.22)$$

der Schicht entsteht. Der Verschiebungsvektor  ${}_0\mathbf{u}_L$  bezeichnet die Verschiebung des Punktes  ${}_0P_L$  in  $\mathcal{S}_L$  der unverformten Konfiguration der Schicht zum Punkt  ${}_0p_L$  in  $\mathcal{S}_L$  der verformten Konfiguration, vgl. Abb. 3.6.

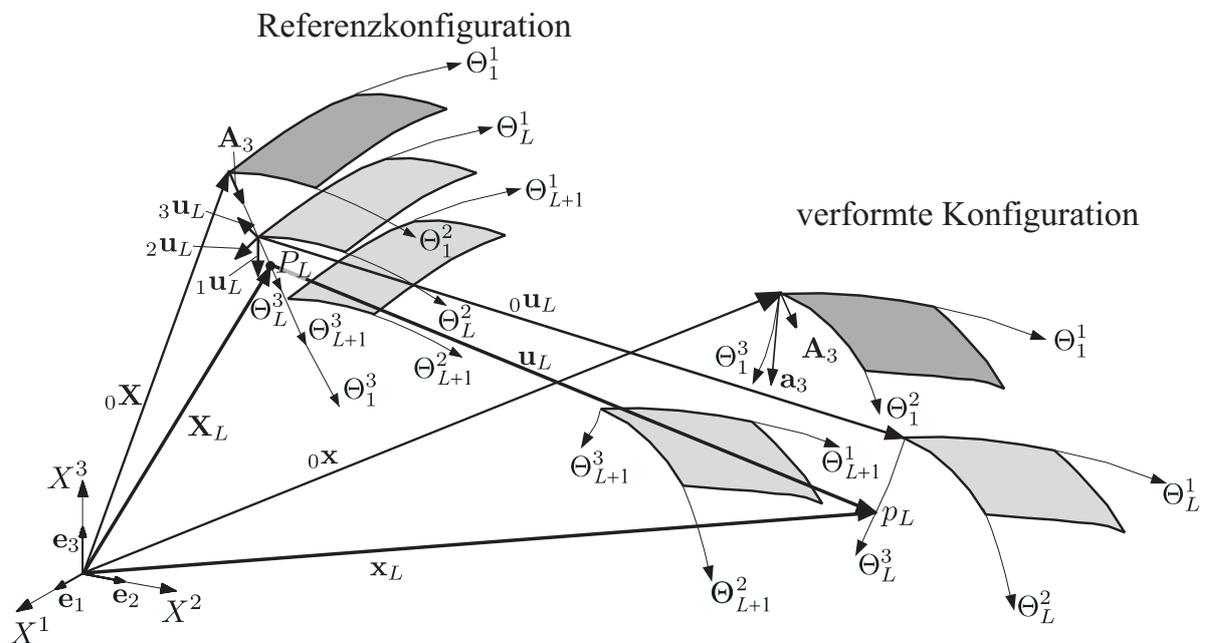


Abbildung 3.6: Mehrschichten-Schalenkinematik

### 3.2.3 Verzerrungstensoren einer Schicht

Der Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}_L = E_{ijL} \mathbf{G}_L^i \otimes \mathbf{G}_L^j \quad (3.23)$$

jeder Schicht  $\mathcal{B}_L$  der Mehrschichtenkinematik wird analog der in Abschnitt 2.4 vorgestellten Einschichtenkinematik auf der Grundlage des Verschiebungsfeldes (3.21) des Schalenschichtenkontinuums entwickelt. Werden dazu in den Verzerrungsmaßzahlen (2.54) die Basisvektoren  $\mathbf{G}_{iL}$  des Schalenraumes der Schicht  $\mathcal{B}_L$  durch den Schalentensor (3.17) mit den Koordinaten  $\Theta_L^3$  ( $\Theta_L^3$ ) in

Abhängigkeit der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$  eingesetzt, entsteht

$$\begin{aligned}
E_{\alpha\beta L} &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{d_L} \left( {}_l a_{\alpha\beta L} {}_l \Omega_L - \Theta_1^3 {}_l b_{\alpha\beta L} {}_l \Omega_L + \sum_{k=0}^{d_L} ({}_{kl} c_{\alpha\beta L} {}_k \Omega_L {}_l \Omega_L) \right) \\
E_{3\alpha L} &= E_{\alpha 3 L} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{d_L} \left( {}_l d_{\alpha 3 L} {}_l \Omega_L + {}_l e_{\alpha 3 L} {}_l \Omega_{L,3} - \Theta_1^3 {}_l f_{\alpha 3 L} {}_l \Omega_{L,3} + \sum_{k=0}^{d_L} ({}_{kl} g_{\alpha 3 L} {}_k \Omega_L {}_l \Omega_{L,3}) \right) \\
E_{33 L} &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{d_L} \left( {}_l h_{33 L} {}_l \Omega_{L,3} + \sum_{k=0}^{d_L} ({}_{kl} i_{33 L} {}_k \Omega_{L,3} {}_l \Omega_{L,3}) \right) \tag{3.24}
\end{aligned}$$

mit den Teilverzerrungsmaßen

$$\begin{aligned}
{}_l a_{\alpha\beta L} &= {}_l \mathbf{u}_{L,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + {}_l \mathbf{u}_{L,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha \\
{}_l b_{\alpha\beta L} &= \mathbf{A}_\lambda \cdot (B_\beta^\lambda {}_l \mathbf{u}_{L,\alpha} + B_\alpha^\lambda {}_l \mathbf{u}_{L,\beta}) \\
{}_{kl} c_{\alpha\beta L} &= {}_k \mathbf{u}_{L,\alpha} \cdot {}_l \mathbf{u}_{L,\beta} \\
{}_l d_{\alpha 3 L} &= {}_l \mathbf{u}_{L,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 \\
{}_l e_{\alpha 3 L} &= {}_l \mathbf{u}_L \cdot \mathbf{A}_\alpha \\
{}_l f_{\alpha 3 L} &= B_\alpha^\lambda \mathbf{A}_\lambda \cdot {}_l \mathbf{u}_L \\
{}_{kl} g_{\alpha 3 L} &= {}_k \mathbf{u}_{L,\alpha} \cdot {}_l \mathbf{u}_L \\
{}_l h_{33 L} &= 2 {}_l \mathbf{u}_L \cdot \mathbf{A}_3 \\
{}_{kl} i_{33 L} &= {}_k \mathbf{u}_L \cdot {}_l \mathbf{u}_L \tag{3.25}
\end{aligned}$$

in Abhängigkeit von dem Basissystem  $\mathbf{A}_{i_1} = \mathbf{A}_i$  der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$ . Die Teilverzerrungsmaße unterscheiden sich nur durch den Index für die Schicht von den bereits für die Einschichten-Schalentheorie hergeleiteten. Für jeden Punkt  ${}_0 P_L$  der unverformten Schichtenreferenzfläche  $\mathcal{S}_L$ , der durch den Verschiebungsvektor  ${}_0 \mathbf{u}_L$  in den Punkt  ${}_0 p_L$  der verformten Schichtenreferenzfläche übergeht, kann für die oberflächenorientierte Mehrschichten-Schalentheorie aus (3.24) analog (2.74) durch Auswertung an der Schichtenreferenzfläche der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}_{\mathcal{S}_L} = \mathbf{E}_L|_{\Theta_L^3=0} = \bar{E}_{ijL} \mathbf{A}_L^i \otimes \mathbf{A}_L^j \tag{3.26}$$

der Oberfläche (Schichtenoberfläche) berechnet werden, der mit den Verzerrungsmaßzahlen  $\bar{E}_{ijL}$  bezüglich des kontravarianten Basissystems  $\mathbf{A}_L^i$  der unverformten Schichtenreferenzfläche dargestellt wird. Es entsteht

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{\alpha\beta L} &= \frac{1}{2} {}_0 a_{\alpha\beta L} {}_0 \Omega_L - \Theta_1^3 {}_0 b_{\alpha\beta L} {}_0 \Omega_L + {}_00 c_{\alpha\beta L} {}_0 \Omega_L {}_0 \Omega_L \\
\bar{E}_{3\alpha L} &= \bar{E}_{\alpha 3} = \frac{1}{2} ({}_0 d_{\alpha 3 L} {}_0 \Omega_L + {}_1 e_{\alpha 3 L} {}_1 \Omega_{L,3} - \Theta_1^3 {}_1 f_{\alpha 3 L} {}_1 \Omega_{L,3} + {}_01 g_{\alpha 3 L} {}_0 \Omega_L {}_1 \Omega_{L,3}) \\
\bar{E}_{33 L} &= \frac{1}{2} {}_1 h_{33 L} {}_1 \Omega_{L,3} + {}_11 i_{33 L} {}_1 \Omega_{L,3} {}_1 \Omega_{L,3} \tag{3.27}
\end{aligned}$$

mit den Teilverzerrungsmaßen (3.25), wobei die krümmungsabhängigen Teilverzerrungsmaße  ${}_l b_{\alpha\beta L}$  und  ${}_l f_{\alpha 3 L}$  im Unterschied zur Einschichtentheorie in der Mehrschichtentheorie mit den

innerhalb jeder Schicht in (3.13) gewählten Basisfunktion  ${}_l\Omega_L(\Theta_L^3) = (\Theta_L^3)^l$  außer bei  $L = 1$  nicht verschwinden, da für  $\Theta_1^3$  die Koordinate (3.6) der Schichtenreferenzfläche eingesetzt werden muss. Die Verzerrungsmaßzahlen (3.27) ergeben sich damit für  $L > 1$  zu

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\alpha\beta L} &= \frac{1}{2}({}_0\mathbf{u}_{L,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + {}_0\mathbf{u}_{L,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha) - \left(\sum_{K=1}^{L-1} H_K\right) \mathbf{A}_\lambda \cdot (B_\beta^\lambda {}_0\mathbf{u}_{L,\alpha} + B_\alpha^\lambda {}_0\mathbf{u}_{L,\beta}) + \\ &\quad + {}_0\mathbf{u}_{L,\alpha} \cdot {}_0\mathbf{u}_{L,\beta} \\ \bar{E}_{3\alpha L} &= \bar{E}_{\alpha 3 L} = \frac{1}{2} \left( {}_0\mathbf{u}_{L,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 + {}_1\mathbf{u}_L \cdot \mathbf{A}_\alpha - \left(\sum_{K=1}^{L-1} H_K\right) B_\alpha^\lambda \mathbf{A}_\lambda \cdot {}_1\mathbf{u}_L + \right. \\ &\quad \left. + {}_0\mathbf{u}_{L,\alpha} \cdot {}_1\mathbf{u}_L \right) \\ \bar{E}_{33 L} &= {}_1\mathbf{u}_L \cdot \mathbf{A}_3 + {}_1\mathbf{u}_L \cdot {}_1\mathbf{u}_L.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Die Anteile, in denen die Summe enthalten ist, verschwinden für  $L = 1$  aus diesen Verzerrungsmaßzahlen, da  $\Theta_1^3$  in der Schichtenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$  ihren Ursprung hat.

### 3.2.4 Spannungs- und Elastizitätstensor einer Schicht

Die PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen

$$\mathbf{S}_L = S_L^{ij} \mathbf{G}_{iL} \otimes \mathbf{G}_{jL} = \mathbf{C}_L : \mathbf{E}_L\tag{3.29}$$

innerhalb des Schalenkontinuums jeder Schicht  $\mathcal{B}_L$  entsprechend (2.87) lassen sich analog (2.143) bei Verwendung eines linear elastischen Materials mit dem Elastizitätstensor  $\mathbf{C}_L$  der Schicht aus dem Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_L$  nach (3.23) berechnen, wenn der inneren Energie ein Potenzial zugrunde liegt und Spannungsfreiheit im unverformten Zustand vorausgesetzt wird. Der Elastizitätstensor

$$\mathbf{C}_L = C_L^{ijkl} \mathbf{M}_{iL} \otimes \mathbf{M}_{jL} \otimes \mathbf{M}_{kL} \otimes \mathbf{M}_{lL} = C_L^{ijkl} \mathbf{G}_{iL} \otimes \mathbf{G}_{jL} \otimes \mathbf{G}_{kL} \otimes \mathbf{G}_{lL}\tag{3.30}$$

der Schicht  $\mathcal{B}_L$  wird analog (2.144) mit einem analog dem in Abschnitt 2.5.3 eingeführten Basissystem  $\{\mathbf{M}_L^i = \mathbf{M}_{iL}; i = 1, 2, 3\}$  gebildet. Werden die Spannungen (3.29) an einem materiellen Punkt  ${}_0P_L$  in der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_L$ , die Teil der Schicht  $\mathcal{B}_L$  ist, mit Hilfe des Verzerrungstensors (3.26) der Oberfläche berechnet, entstehen die Spannungen der Oberfläche als 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen

$$\mathbf{S}_{SL} = \bar{S}_L^{ij} \mathbf{A}_{iL} \otimes \mathbf{A}_{jL} = \mathbf{S}_L|_{\Theta_L^3=0} = \mathbf{C}_L : \mathbf{E}_{SL}\tag{3.31}$$

der Schicht  $\mathcal{B}_L$ . Diese können mit Hilfe von (2.86) bzw. (2.88) in Spannungen der Oberfläche als CAUCHY-Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}_{SL} = \bar{\sigma}_L^{ij} \mathbf{a}_{iL} \otimes \mathbf{a}_{jL} = \sigma_{\bar{\mathbf{m}}L}^{kl} \bar{\mathbf{m}}_{kL} \otimes \bar{\mathbf{m}}_{lL}\tag{3.32}$$

am materiellen Punkt  ${}_0p_L$  der verformten Schichtenreferenzfläche  $\mathcal{S}_L$  transformiert werden, die zum Einen mit den Spannungsmaßzahlen  $\bar{\sigma}_L^{ij}$  bezüglich des kovarianten Basissystems  $\mathbf{a}_{iL}$  dargestellt werden können. Zum Anderen können deren Maßzahlen  $\sigma_{\bar{\mathbf{m}}L}^{kl}$  analog (2.113) bezüglich eines orthogonalen Basissystems  $\{\bar{\mathbf{m}}_L^i = \bar{\mathbf{m}}_{iL}; i = 1, 2, 3\}$ , vgl. (2.105), angegeben werden. Aus letzterer Darstellung wird im Punkt  ${}_0p_L$  mit Hilfe des normierten Normalenvektors  $\bar{\mathbf{m}}_L^3$  des Flächenelementes  $da_{SL}$  der verformten Schichtenreferenzfläche der Spannungsvektor

$$\boldsymbol{\sigma}_{KL} = \boldsymbol{\sigma}_{SL} \cdot \bar{\mathbf{m}}_L^3 = \sigma_{\bar{\mathbf{m}}L}^{k3} \bar{\mathbf{m}}_{kL}\tag{3.33}$$

der Oberfläche berechnet, vgl. Abb. 3.7.

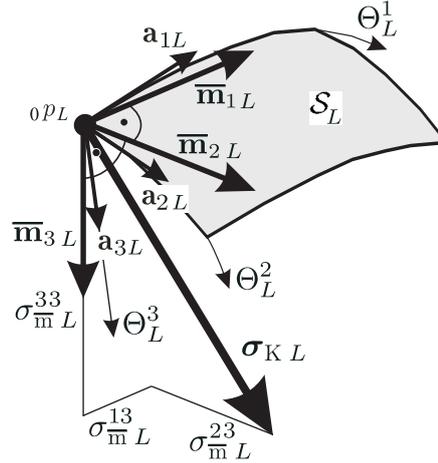


Abbildung 3.7: Spannungsvektor der Oberfläche

### 3.2.5 Äußere Lasten und Direktorkräfte

#### Äußeres Lastvektorfeld einer Schicht.

Es ist analog (2.154)

$$\mathbf{F}_{aL} = \mathbf{F}_{aL}(\Theta_1^1, \Theta_1^2, \Theta_1^3(\Theta_L^3)) = F_{aL}^i \mathbf{e}_i \quad (3.34)$$

das im Schalenkörper der Schicht  $\mathcal{B}_L$  definierte volumenbezogene äußere Lastvektorfeld, das als Funktion der Koordinaten  $\Theta_1^3$ , vgl. (3.6), der Schalenreferenzfläche ausgedrückt wird, und analog (2.155)

$${}_0\mathbf{F}_{aL} = {}_0\mathbf{F}_{aL}(\Theta_1^1, \Theta_1^2) = {}_0F_{aL}^i \mathbf{e}_i \quad (3.35)$$

das in der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_L$  der Schicht definierte äußere Lastvektorfeld.

#### Direktorkräfte einer Schicht.

Es werden wie bei der Einführung der Direktorkräfte der Einschichtentheorie in Abschnitt 2.8.1 der Spaltenvektor der Basisfunktionen (3.13) der Schicht  $\mathcal{B}_L$  durch

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}_L &= [ {}_0\Omega_L \quad {}_1\Omega_L \quad {}_2\Omega_L \quad {}_3\Omega_L \quad \dots \quad {}_{d_L}\Omega_L ]^T \\ &= [ 1 \quad \Theta_L^3 \quad (\Theta_L^3)^2 \quad (\Theta_L^3)^3 \quad \dots \quad (\Theta_L^3)^{d_L} ]^T \end{aligned} \quad (3.36)$$

und der Spaltenvektor der Direktorkräfte

$$\underline{\mathbf{F}}_{aL} = [ {}_0\mathbf{F}_{aL}^T \quad {}_1\mathbf{F}_{aL}^T \quad {}_2\mathbf{F}_{aL}^T \quad {}_3\mathbf{F}_{aL}^T \quad \dots \quad {}_{d_L}\mathbf{F}_{aL}^T ]^T \quad (3.37)$$

der Schicht  $\mathcal{B}_L$  eingeführt, der sich analog (2.167) zu

$$\underline{\mathbf{F}}_{aL} = \int_{H_L} \underline{\Omega}_L \otimes \mathbf{F}_{aL} \mu d\Theta_L^3 \quad (3.38)$$

ergibt. Die Oberflächenlasten  ${}_0\mathbf{F}_{aL}$  nach (3.35) sind als erstes Element darin enthalten.

### 3.2.6 Diskretisierung aller Größen einer Schicht

#### Diskretisierung.

Die Diskretisierung aller Größen einer Schicht erfolgt völlig analog der Diskretisierung aller Größen der Einschichten-Schalentheorie in Abschnitt 2.9. Als Kennzeichnung dafür, dass es sich nunmehr um die Diskretisierung aller Größen der Schicht  $\mathcal{B}_L$  handelt, werden lediglich alle Größen zusätzlich durch  $L$  indiziert. Es entstehen bei der Diskretisierung des Knotenverschiebungsvektors

$${}^e_l \mathbf{u}_L = {}^e_l u_{iL} \mathbf{e}^i \quad (3.39)$$

jeweils des  $l$ -ten Direktors  ${}^e_l \mathbf{X}_L$  des Knotens  $e$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  analog (2.216) die Freiwerte  ${}^e_l u_{iL}$  ( $i = 1, 2, 3; l = 0, \dots, d_L; e = 1, \dots, 9; L = 1, \dots, n_S$ ) eines finiten Elementes für die jeweilige Verschiebungskomponente in Richtung des Basisvektors  $\mathbf{e}^i$  des einbettenden kartesischen Koordinatensystems. Diese werden zu dem Spaltenvektor

$${}^f \underline{\mathbf{u}}_L^v = \left[ {}^f_0 u_{1L} \quad {}^f_0 u_{2L} \quad {}^f_0 u_{3L} \quad {}^f_1 u_{1L} \quad \dots \quad {}^f_l u_{iL} \quad \dots \quad {}^f_{d_L} u_{3L} \right]^T \quad (3.40)$$

eines Element-Knotenpunktes  $f$  zusammengefasst.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Kennzeichnung von Spaltenvektoren und Matrizen, die Verschiebungen bzw. innere oder äußere Kräfte eines finiten Mehrschichten-Elementes zusammenfassen, neben weiteren Indizierungen entweder durch die nachgestellte einfache obere Indizierung  $\square^v$  mit dem Kennzeichen „v“, das für das Wort „vollständig“ steht, oder durch die nachgestellte einfache obere Indizierung  $\square^r$  mit dem Kennzeichen „r“, das für das Wort „reduziert“ steht, erfolgen kann. Die reduzierten Größen werden nachfolgend im Abschnitt 3.3 eingeführt.

Den Knotenverschiebungsvektoren (3.39) stehen gegenüber die äußeren Lasten der Schicht  $\mathcal{B}_L$  in Form der Vektoren der Direktorkräfte

$${}^e_l \mathbf{F}_{aL} = {}^e_l F_{aL}^i \mathbf{e}_i \quad (3.41)$$

jeweils des  $l$ -ten Direktors  ${}^e_l \mathbf{X}_L$  des Knotens  $e$  analog (2.252) mit den Komponenten  ${}^e_l F_{aL}^i$  ( $i = 1, 2, 3; l = 0, \dots, d_L; e = 1, \dots, 9; L = 1, \dots, n_S$ ) eines finiten Elementes in die jeweilige Richtung des Basisvektors  $\mathbf{e}^i$  des einbettenden kartesischen Koordinatensystems. Diese werden zu dem Spaltenvektor

$${}^f \underline{\mathbf{F}}_{aL} = \left[ {}^f_0 F_{aL}^1 \quad {}^f_0 F_{aL}^2 \quad {}^f_0 F_{aL}^3 \quad {}^f_1 F_{aL}^1 \quad \dots \quad {}^f_l F_{aL}^i \quad \dots \quad {}^f_{d_L} F_{aL}^3 \right]^T \quad (3.42)$$

eines Element-Knotenpunktes  $f$  zusammengefasst.

#### Tangentiale Steifigkeitsmatrix und Vektor der inneren Kräfte.

Analog (2.267) werden durch

$${}^f_m f_{jL} = \int_{\mathcal{B}_L} C_L^{irkl} E_{irL} \frac{\partial E_{klL}}{\partial {}^f_m u_{jL}} dV_L \quad (3.43)$$

die Elemente eines Spaltenvektors der inneren Kräfte für die einzelne Schicht  $\mathcal{B}_L$  abgekürzt, die zu dem Spaltenvektor

$${}^f \underline{\mathbf{f}}_L = \left[ {}^f_0 f_{1L} \quad {}^f_0 f_{2L} \quad {}^f_0 f_{3L} \quad {}^f_1 f_{1L} \quad \dots \quad {}^f_m f_{jL} \quad \dots \quad {}^f_{d_L} f_{3L} \right]^T \quad (3.44)$$

eines Element-Knotenpunktes  $f$  zusammengefasst werden. Analog (2.268) werden durch

$${}^{sf}k_{jpL} = \int_{\mathcal{B}_L} C_L^{irkl} \left( \frac{\partial E_{irL}}{\partial {}^f_m u_{jL}} \frac{\partial E_{klL}}{\partial {}^s_n u_{pL}} + E_{irL} \frac{\partial^2 E_{klL}}{\partial {}^f_m u_{jL} \partial {}^s_n u_{pL}} \right) dV_L \quad (3.45)$$

die Elemente einer tangentialen Steifigkeitsmatrix für die einzelne Schicht  $\mathcal{B}_L$  abgekürzt, die zur Matrix

$${}^{sf}\underline{\mathbf{K}}_{TL} = \begin{bmatrix} {}^{sf}k_{0011L} & {}^{sf}k_{0012L} & {}^{sf}k_{0013L} & {}^{sf}k_{1011L} & \cdots & {}^{sf}k_{n01pL} & \cdots & {}^{sf}k_{dL0k13L} \\ {}^{sf}k_{0021L} & {}^{sf}k_{0022L} & {}^{sf}k_{0023L} & {}^{sf}k_{1021L} & \cdots & {}^{sf}k_{n02pL} & \cdots & {}^{sf}k_{dL0k23L} \\ {}^{sf}k_{0031L} & {}^{sf}k_{0032L} & {}^{sf}k_{0033L} & {}^{sf}k_{1031L} & \cdots & {}^{sf}k_{n03pL} & \cdots & {}^{sf}k_{dL0k33L} \\ {}^{sf}k_{0111L} & {}^{sf}k_{0112L} & {}^{sf}k_{0113L} & {}^{sf}k_{1111L} & \cdots & {}^{sf}k_{n11pL} & \cdots & {}^{sf}k_{dL1k13L} \\ \cdots & \cdots \\ {}^{sf}k_{0m j1L} & {}^{sf}k_{0m j2L} & {}^{sf}k_{0m j3L} & {}^{sf}k_{1m j1L} & \cdots & {}^{sf}k_{nm j pL} & \cdots & {}^{sf}k_{dL m k j3L} \\ \cdots & \cdots \\ {}^{sf}k_{0dL k31L} & {}^{sf}k_{0dL k32L} & {}^{sf}k_{0dL k33L} & {}^{sf}k_{1dL k31L} & \cdots & {}^{sf}k_{ndL k3pL} & \cdots & {}^{sf}k_{dL dL k33L} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

zusammengefasst werden, die aus Elementen der Element-Knotenpunkte  $s$  und  $f$  besteht und eine Teilmatrix der im Folgenden aufzubauenden tangentialen Steifigkeitsmatrix des finiten Mehrschichten-Schalenelementes darstellen wird. Die Elemente (3.43) des Spaltenvektors und (3.45) der Matrix der Schicht  $\mathcal{B}_L$ , deren Kinematik an allen Element-Knotenpunkten hierfür völlig unabhängig von der einer anderen Schicht  $\mathcal{B}_K$  mit  $K \neq L$  ist, werden aus den Verzerrungsmaßen (3.24) der Schicht, deren ersten und zweiten Ableitungen nach allen Verschiebungsvariablen  ${}^f_m u_{jL}$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  und den Elementen des Elastizitätstensors  $C_L^{irkl}$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  berechnet. Die Gleichungen (2.267) und (3.43) bzw. (2.268) und (3.45) unterscheiden sich jeweils nur durch die Indizierungen für die Kennzeichnung aller Größen der Schicht  $\mathcal{B}_L$ .

Die Integranden in (3.43) und (3.45), die jeweils mit  $\underline{\mathbf{I}}_L$  bezeichnet werden, sind nichtlineare Funktionen der Koordinaten  $\Theta_1^1, \Theta_1^2, \Theta_1^3$  ( $\Theta_L^3$ ) und  $\Theta_L^3$ . Mit dem differentiellen Volumenelement  $dV_L$  nach (3.19) können die Integrale in (3.43) und (3.45) analog (2.273) umgeformt und durch das Verfahren von GAUSS-LEGENDRE numerisch ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_L} \underline{\mathbf{I}}_L dV_L &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{H_L} \underline{\mathbf{I}}_L (\Theta_1^1, \Theta_1^2, \Theta_1^3 (\Theta_L^3), \Theta_L^3) \mu \sqrt{A} d\Theta_L^3 d\Theta_1^2 d\Theta_1^1 \\ &= \sum_{x=1}^{n_i} \sum_{y=1}^{n_i} \sum_{z=1}^{n_i} \left( \left( \underline{\mathbf{I}}_L \mu \sqrt{A} \right) \Big|_{\Theta_1^1=i_x, \Theta_1^2=i_y, \Theta_L^3=j_z} \chi_x \chi_y \chi_z \frac{H_L}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Als Integrationspunkte der Schicht  $\mathcal{B}_L$  werden im Weiteren die Punkte

$${}^0P_L(i_x, i_y, \Theta_L^3) \Big|_{\Theta_L^3=0} \quad (3.48)$$

in der Schichtenreferenzfläche und als Integrationspunkte des finiten Mehrschichtenelementes die Punkte

$${}^0P_1(i_x, i_y, \Theta_1^3) \Big|_{\Theta_1^3=0} \quad (3.49)$$

der Schichtenreferenzfläche der Schicht  $\mathcal{B}_1$  verstanden.

Abschließend soll an dieser Stelle im Vorgriff auf die in Abschnitt 3.2.7 u. a. einzuführende tangentielle Steifigkeitsmatrix des finiten Mehrschichten-Elementes der Aufbau der knotenbezogenen Matrix

$${}^{sf}\underline{\mathbf{K}}_T^v = \begin{bmatrix} {}^{ss}\underline{\mathbf{K}}_{T1} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & {}^{fs}\underline{\mathbf{K}}_{T1} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & {}^{ss}\underline{\mathbf{K}}_{T2} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \dots & \underline{\mathbf{0}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & {}^{fs}\underline{\mathbf{K}}_{TL} & \dots \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & {}^{ss}\underline{\mathbf{K}}_{Tns} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & {}^{fs}\underline{\mathbf{K}}_{Tns} \\ {}^{sf}\underline{\mathbf{K}}_{T1} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & {}^{ff}\underline{\mathbf{K}}_{T1} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \dots & \dots & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & {}^{ff}\underline{\mathbf{K}}_{T2} & \dots & \underline{\mathbf{0}} \\ \dots & \dots & {}^{sf}\underline{\mathbf{K}}_{TL} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & {}^{sf}\underline{\mathbf{K}}_{Tns} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & {}^{ff}\underline{\mathbf{K}}_{Tns} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

veranschaulicht werden, die die knoten- und schichtbezogenen Matrizen  ${}^{sf}\underline{\mathbf{K}}_{TL}$  zweier Knoten  $s$  und  $f$  zusammenfasst.

### 3.2.7 Tangentielle Steifigkeitsmatrix und Vektor der inneren Kräfte eines finiten Mehrschichten-Elementes

Aus der Arbeitsgleichung (2.206) wird in Analogie zur matriziellen Formulierung (2.272) dieser Gleichung mit den Matrizen und Spaltenvektoren eines finiten Elementes der Einschichten-Schalentheorie die matrizielle Formulierung eines finiten Elementes der Mehrschichten-Schalentheorie wie folgt gebildet:

$$\delta ({}^e\underline{\mathbf{u}}^v)^T {}^e\underline{\mathbf{f}}^v + \delta ({}^e\underline{\mathbf{u}}^v)^T {}^e\underline{\mathbf{K}}_T^v {}^e\underline{\mathbf{u}}^v - \delta ({}^e\underline{\mathbf{u}}^v)^T {}^e\underline{\mathbf{F}}_a^v = 0. \quad (3.51)$$

Es werden durch die diskretisierten Knotenverschiebungsvektoren, vgl. (3.39), der vollständige Spaltenvektor der Verschiebungsfreiwerte

$$\begin{aligned} {}^e\underline{\mathbf{u}}^v &= \left[ {}^1_0u_{11} \quad {}^1_0u_{21} \quad {}^1_0u_{31} \quad {}^1_1u_{11} \quad \dots \quad {}^1_0u_{12} \quad \dots \quad {}^f_m u_{jL} \quad \dots \quad {}^9_{d_{ns}} u_{3ns} \right]^T \\ &= \left[ ({}^1_0\underline{\mathbf{u}}_1)^T \quad ({}^1_1\underline{\mathbf{u}}_1)^T \quad \dots \quad ({}^1_{d_1}\underline{\mathbf{u}}_1)^T \quad ({}^1_0\underline{\mathbf{u}}_2)^T \quad ({}^1_1\underline{\mathbf{u}}_2)^T \quad \dots \quad ({}^f_m\underline{\mathbf{u}}_L)^T \quad \dots \quad ({}^9_{d_{ns}}\underline{\mathbf{u}}_{ns})^T \right]^T \\ &= \left[ ({}^1\underline{\mathbf{u}}_1)^T \quad \dots \quad ({}^1\underline{\mathbf{u}}_{ns})^T \quad ({}^2\underline{\mathbf{u}}_1)^T \quad \dots \quad ({}^f\underline{\mathbf{u}}_L)^T \quad \dots \quad ({}^9\underline{\mathbf{u}}_{ns})^T \right]^T \end{aligned} \quad (3.52)$$

und durch (3.41) der zu diesem korrespondierende Spaltenvektor der äußeren Kräfte

$$\begin{aligned} {}^e\underline{\mathbf{F}}_a^v &= \left[ {}^1_0F_{a11} \quad {}^1_0F_{a21} \quad {}^1_0F_{a31} \quad {}^1_1F_{a11} \quad \dots \quad {}^1_0F_{a12} \quad \dots \quad {}^f_m F_{ajL} \quad \dots \quad {}^9_{d_{ns}} F_{a3ns} \right]^T \\ &= \left[ ({}^1\underline{\mathbf{F}}_{a1})^T \quad \dots \quad ({}^1\underline{\mathbf{F}}_{ans})^T \quad ({}^2\underline{\mathbf{F}}_{a1})^T \quad \dots \quad ({}^f\underline{\mathbf{F}}_{aL})^T \quad \dots \quad ({}^9\underline{\mathbf{F}}_{ans})^T \right]^T \end{aligned} \quad (3.53)$$

des finiten Mehrschichten-Schalenelementes eingeführt, die sich jeweils auch aus einzelnen Abschnitten der Spaltenvektoren für die einzelne Schicht  $\mathcal{B}_L$  eines Element-Knotenpunktes  $f$ , vgl. (3.40) bzw. (3.42) darstellen lassen. Die Elemente  ${}^f_m u_{jL}$  bzw.  ${}^f_m F_{ajL}$  sind innerhalb der Spaltenvektoren erst richtungsweise, dann direktorweise, dann schichtenweise und zuletzt knotenweise aneinandergereiht. Der zum vollständigen Spaltenvektor (3.52) der Verschiebungsfreiwerte korrespondierende Spaltenvektor der inneren Kräfte

$${}^e\underline{\mathbf{f}}^v = \left[ ({}^1\underline{\mathbf{f}}_1)^T \quad ({}^1\underline{\mathbf{f}}_2)^T \quad \dots \quad ({}^1\underline{\mathbf{f}}_{ns})^T \quad ({}^2\underline{\mathbf{f}}_1)^T \quad \dots \quad ({}^f\underline{\mathbf{f}}_L)^T \quad \dots \quad ({}^9\underline{\mathbf{f}}_{ns})^T \right]^T \quad (3.54)$$

des finiten Mehrschichten-Schalenelementes wird wegen besserer Übersichtlichkeit lediglich durch die Spaltenvektoren  ${}^f \underline{\mathbf{f}}_L$  der inneren Kräfte für die einzelne Schicht  $\mathcal{B}_L$  eines Element-Knotenpunktes  $f$ , vgl. (3.44), dargestellt. Alle diese Element-Spaltenvektoren (3.52), (3.53) und (3.54) haben die gleiche Anzahl  $n_{\text{El.-Fhg.}}$  von Elementen. Die zum vollständigen Spaltenvektor (3.52) der Verschiebungsfreiwerte korrespondierende tangentiale Steifigkeitsmatrix

$${}^e \underline{\mathbf{K}}_T^v = \begin{bmatrix} {}^{11} \underline{\mathbf{K}}_{T1} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & {}^{21} \underline{\mathbf{K}}_{T1} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & {}^{11} \underline{\mathbf{K}}_{T2} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & {}^{s1} \underline{\mathbf{K}}_{TL} & \dots & \dots \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & {}^{11} \underline{\mathbf{K}}_{Tn_s} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & \dots & {}^{91} \underline{\mathbf{K}}_{Tn_s} \\ {}^{12} \underline{\mathbf{K}}_{T1} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & {}^{22} \underline{\mathbf{K}}_{T1} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} \\ \dots & \dots \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & {}^{1f} \underline{\mathbf{K}}_{TL} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & {}^{sf} \underline{\mathbf{K}}_{TL} & \dots & \underline{\mathbf{0}} \\ \dots & \dots \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & {}^{19} \underline{\mathbf{K}}_{Tn_s} & \underline{\mathbf{0}} & \dots & \underline{\mathbf{0}} & \dots & {}^{99} \underline{\mathbf{K}}_{Tn_s} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

des finiten Mehrschichten-Schalenelementes wird wiederum wegen besserer Übersichtlichkeit lediglich durch die zu den Element-Knotenpunkten  $s$  und  $f$  gehörenden, tangentialen Steifigkeitsmatrizen  ${}^{sf} \underline{\mathbf{K}}_{TL}$  für die einzelne Schicht  $\mathcal{B}_L$ , vgl. (3.46), dargestellt. Sie hat eine Anzahl von  $(n_{\text{El.-Fhg.}})^2$  Elementen. Zum Vergleich sei auf die nur die Elemente der zwei Knoten  $s$  und  $f$  enthaltende Matrix (3.50) des finiten Mehrschichten-Schalenelementes verwiesen.

Die tangentiale Steifigkeitsmatrix  ${}^e \underline{\mathbf{K}}_T^v = {}^e \underline{\mathbf{K}}_T^v ({}^e \underline{\mathbf{u}}^v)$  und der Spaltenvektor der inneren Knotenkräfte  ${}^e \underline{\mathbf{f}}^v = {}^e \underline{\mathbf{f}}^v ({}^e \underline{\mathbf{u}}^v)$  sind Funktionen von allen eingeführten Freiwerten  ${}^f_m u_{jL}$ .

### 3.3 Vollständiger Verbund in der verformten Konfiguration

Als ein Sonderfall der später behandelten allgemeinen Mehrschichten-Schalenkinematiken mit nicht vollständigem Verbund zwischen den Schichten im verformten Zustand wird zunächst der volle Verbund aller Schichten miteinander im verformten Zustand, der für den unverformten Zustand durch (3.9) generell vorausgesetzt wird, behandelt.

#### 3.3.1 Mehrschichten-Schalenkinematik in Bereichen mit Schichtenverbund

Sind die Schichten  $\mathcal{B}_{L-1}$  und  $\mathcal{B}_L$  in der verformten Konfiguration im Punkt  ${}_0 p_L$  in  $\mathcal{S}_L$  wie im Ausgangszustand miteinander verbunden, vgl. (3.9), gilt in jedem Punkt  ${}_0 p_L$  in  $\mathcal{S}_L$  für  $L > 1$ :

$${}_0 \underline{\mathbf{u}}_L = \underline{\mathbf{u}}_{L-1} \Big|_{\Theta_{L-1}^3 = H_{L-1}}, \quad (3.56)$$

vgl. Abb. 3.8. Das heißt, das Verschiebungsfeld  $\underline{\mathbf{u}}$  des mehrschichtigen Schalenkörpers besitzt über die Schichten  $\mathcal{B}_{L-1}$  und  $\mathcal{B}_L$  hinweg eine sogenannte  $C_0$ -Stetigkeit. Gilt diese Bedingung über die Schichten  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_L$  hinweg, lässt sich zunächst für jeden Punkt  ${}_0 p_L$  in  $\mathcal{S}_L$  für  $L > 1$ , also für die Verschiebung der Punkte der Schichtenreferenzfläche, schreiben:

$${}_0 \underline{\mathbf{u}}_L (\Theta_L^1, \Theta_L^2) = {}_0 \underline{\mathbf{u}}_1 + \sum_{K=1}^{L-1} \sum_{l=1}^{d_K} (H_K)^l {}_l \underline{\mathbf{u}}_K. \quad (3.57)$$

Für das Verschiebungsfeld (3.21) für jeden Punkt  $p_L$  in  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$ , also für die Verschiebung der Punkte innerhalb der Schicht, lässt sich dann schreiben:

$$\underline{\mathbf{u}}_L (\Theta_L^1, \Theta_L^2, \Theta_L^3) = {}_0 \underline{\mathbf{u}}_1 + \sum_{K=1}^{L-1} \sum_{l=1}^{d_K} (H_K)^l {}_l \underline{\mathbf{u}}_K + \sum_{l=1}^{d_L} (\Theta_L^3)^l {}_l \underline{\mathbf{u}}_L. \quad (3.58)$$

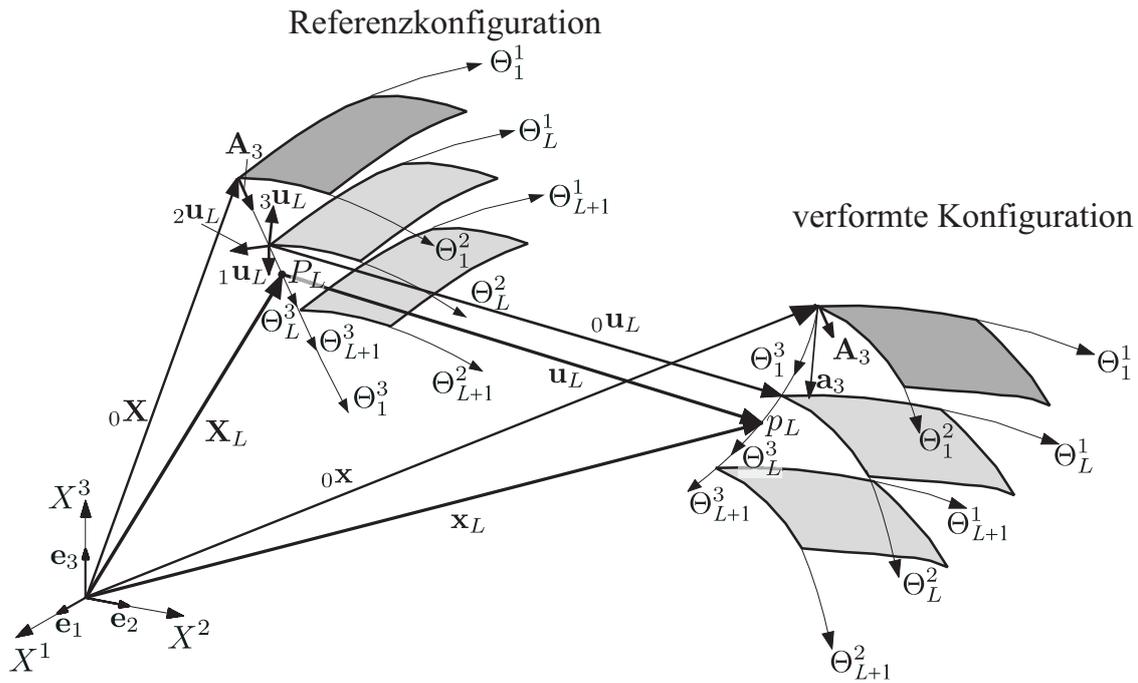


Abbildung 3.8: Mehrschichten-Schalenkinematik

Es tritt nur eine Referenzflächenverschiebung explizit in den Gleichungen (3.57) und (3.58) auf, und zwar die Verschiebung  ${}_0\mathbf{u}_1$  der Referenzfläche der ersten Schicht, da die Verschiebungen der Referenzflächen jeder anderen Schicht - bei vollem Verbund der Schichten untereinander - sich auf diese zurückführen lassen. Der zweite Teil in (3.57) bzw. (3.58) repräsentiert die Verformung des Schalenkontinuums zwischen den Schichtenreferenzflächen  $\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{S}_L$ , und der dritte Teil in (3.58) stellt die Verformung innerhalb der Schicht  $\mathcal{B}_L$  selbst dar.

Die so entstehenden Kinematiken sind abhängig von der Anzahl der Direktoren der jeweiligen Schicht, die unterschiedlich sein kann. Analog der in Abb. 2.4 dargestellten verschiedenen Einschichtenkinematiken werden in Abb. 3.9 exemplarisch Zweischichtenkinematiken dargestellt, bei denen in beiden Schichten jeweils die gleiche Anzahl von Direktoren verwendet werden.

### 3.3.2 Verschiebungsfreiwerte des finiten Mehrschichten-Elementes bei vollem Verbund

In diesem Abschnitt werden zugehörig zu den in Abschnitt 3.2.6 eingeführten vollständigen Spaltenvektoren reduzierte Spaltenvektoren zuerst am Knotenpunkt  $f$  für eine einzelne Schicht ( ${}^f\mathbf{u}_L^r$ ), des Weiteren an einem beliebigen Punkt der Schalenreferenzfläche für alle Schichten ( $\mathbf{u}^r$ ) und schließlich für alle Knotenpunkte für alle Schichten des finiten Elementes ( ${}^e\mathbf{u}^r$ ) - für den Fall des vollständigen Verbundes zwischen allen Schichten - eingeführt. Sie erhalten die nachgestellte einfache obere Indizierung  $\square^r$  mit dem Kennzeichen „r“, das für das Wort „reduziert“ steht. Die reduzierten Spaltenvektoren sind genauso groß wie die jeweils zugehörigen vollständigen Spaltenvektoren. Zusätzlich zu den in diesem Abschnitt eingeführten reduzierten Spaltenvektoren werden später im Abschnitt 4.2 weitere, und zwar für den nicht vollständigen Verbund, eingeführt.

#### Knotenpunkt-Verschiebungsvektoren der Schicht.

Zugehörig zum vollständigen Spaltenvektor  ${}^f\mathbf{u}_L^v$ , vgl. (3.40), wird unter Berücksichtigung der in (3.57) und (3.58) dargestellten Verschiebungen der Schicht  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  ein reduzierter Spaltenvektor, der die Knotenpunktverschiebungen eines Element-Knotenpunktes  $f$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  für

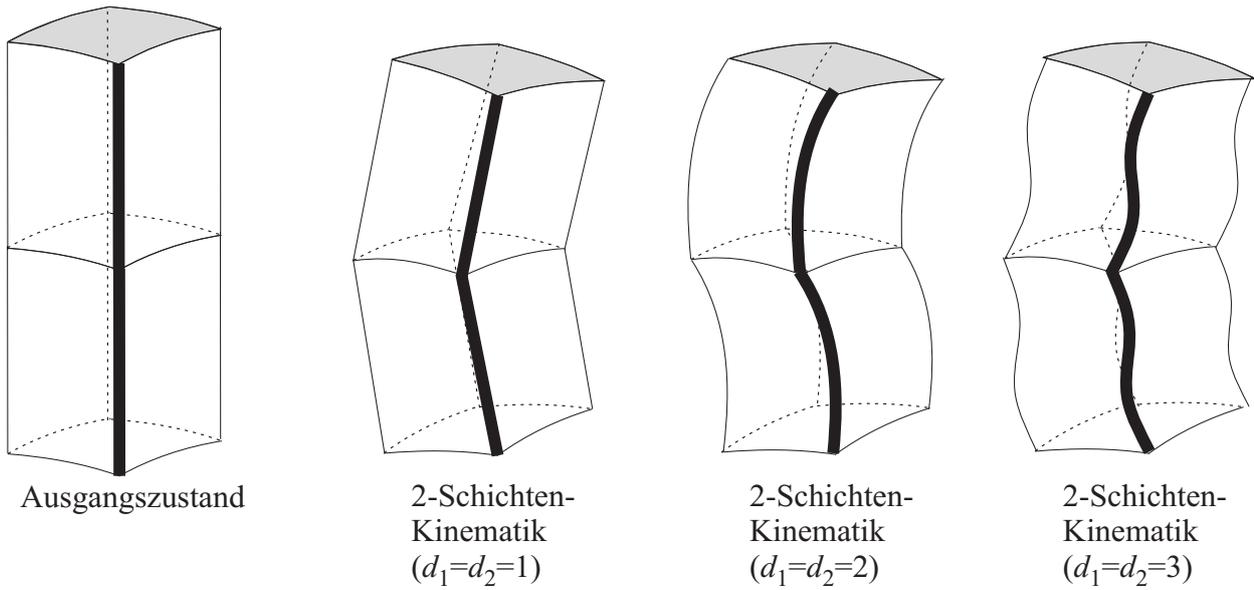


Abbildung 3.9: Mehrschichten-Multidirektor-Kinematiken – mögliche Verformung des Schalenkörpers bei unterschiedlichen Kinematiken (unterschiedliche Anzahl von Direktoren)

$L > 1$  zusammenfasst, durch

$${}^f \underline{\mathbf{u}}_L^f = \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad {}^f_1 u_{1L} \quad \dots \quad {}^f_l u_{iL} \quad \dots \quad {}^f_{d_L} u_{3L} \right]^T \quad (3.59)$$

eingeführt. Dieser enthält gegenüber (3.40) - für den Fall des vollständigen Verbundes zwischen allen Schichten - an allen Knoten  $f$  nicht mehr die Verschiebungsfreiwerte  ${}^f_0 u_{jL}$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$ . An deren Stelle stehen die Werte 0 in der Funktion von Platzhaltern. Die tatsächlichen Werte für die Verschiebungen  ${}^f_0 u_{jL}$ , die hier keine Freiwerte mehr sind, können durch (3.57) berechnet werden.

#### Verschiebungsvektoren am Integrationspunkt des mehrschichtigen finiten Elementes.

Des Weiteren werden analog (3.40) der bisher noch nicht verwendete, und nur der Systematik wegen vorgestellte, vollständige Vektor der Verschiebungsfreiwerte

$$\underline{\mathbf{u}}^v = \left[ {}_0 u_{11} \quad {}_0 u_{21} \quad {}_0 u_{31} \quad {}_1 u_{11} \quad \dots \quad {}_0 u_{12} \quad \dots \quad {}_l u_{iL} \quad \dots \quad {}_d u_{3n_s} \right]^T \quad (3.60)$$

und analog (3.59) der zugehörige reduzierte Vektor der Verschiebungsfreiwerte

$$\underline{\mathbf{u}}^r = \left[ {}_0 u_{11} \quad {}_0 u_{21} \quad {}_0 u_{31} \quad {}_1 u_{11} \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad {}_l u_{iL} \quad \dots \quad {}_d u_{3n_s} \right]^T \quad (3.61)$$

für jeden beliebigen Punkt  ${}_0 P_1$  der Schichtenreferenzfläche der ersten Schicht, zu denen die Integrationspunkte (3.49) des mehrschichtigen finiten Elementes gehören, aus den zusammengefassten Verschiebungsfreiwerten aller Schichten an diesem Punkt unter Berücksichtigung von (3.57) und (3.58) gebildet.

#### Verschiebungsvektoren des mehrschichtigen finiten Elementes.

Es wird zudem für das gesamte mehrschichtige finite Element entsprechend dem vollständigen Spaltenvektor der Verschiebungsfreiwerte  ${}^e \underline{\mathbf{u}}^v$ , vgl. (3.52), ein reduzierter Spaltenvektor der Ver-

schiebungsfreiwerte

$$\begin{aligned}
{}^e \underline{\mathbf{u}}^r &= \left[ \begin{array}{cccccccc} {}^1_0 u_{11} & {}^1_0 u_{21} & {}^1_0 u_{31} & {}^1_1 u_{11} & \dots & 0 & \dots & {}^f_m u_{jL} & \dots & {}^9_{d_{ns}} u_{3ns} \end{array} \right]^T \\
&= \left[ \begin{array}{cccccccc} ({}^1_0 \mathbf{u}_1)^T & ({}^1_1 \mathbf{u}_1)^T & \dots & ({}^1_{d_1} \mathbf{u}_1)^T & \mathbf{0}^T & ({}^1_1 \mathbf{u}_2)^T & \dots & ({}^f_m \mathbf{u}_L)^T & \dots & ({}^9_{d_{ns}} \mathbf{u}_{ns})^T \end{array} \right]^T \\
&= \left[ \begin{array}{cccccccc} ({}^1 \underline{\mathbf{u}}_1^v)^T & \dots & ({}^1 \underline{\mathbf{u}}_{ns}^r)^T & ({}^2 \underline{\mathbf{u}}_1^v)^T & \dots & ({}^f \underline{\mathbf{u}}_L^r)^T & \dots & ({}^9 \underline{\mathbf{u}}_{ns}^r)^T \end{array} \right]^T \quad (3.62)
\end{aligned}$$

eingeführt, der für den Fall des vollständigen Verbundes zwischen allen Schichten an allen Knoten  $f$  nicht mehr die Verschiebungsfreiwerte  ${}^f_0 u_{jL}$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  besitzt, da die in (3.57) und (3.58) beschriebene Kinematik bei vollem Verbund zwischen allen Schichten nach der Diskretisierung an allen Knotenpunkten  $f$  gilt. Die in (3.52) an Stelle der Nullelemente in (3.62) stehenden Elemente des reduzierten Spaltenvektors können wegen der beschriebenen Kopplungen zwischen den Freiheitsgraden vollständig aus dem zu lösenden Gleichungssystem eliminiert werden.

### 3.3.3 Verbundmatrix bei vollem Verbund

#### Verbundmatrix des mehrschichtigen finiten Elementes.

Auf der Grundlage der in (3.58) beschriebenen Kinematik wird eine Verbundmatrix  ${}^e \underline{\mathbf{V}}^0$  des finiten Elementes in jedem Punkt  ${}_0 P_1$  der Schichtenreferenzfläche der ersten Schicht, also der Schalenreferenzfläche definiert, die den reduzierten Vektor der Verschiebungsfreiwerte  ${}^e \underline{\mathbf{u}}^r$  des finiten Elementes mit dem vollständigen Vektor der Verschiebungsfreiwerte  ${}^e \underline{\mathbf{u}}^v$  des finiten Elementes in diesem Punkt verknüpft:

$${}^e \underline{\mathbf{u}}^v = {}^e \underline{\mathbf{V}}^0 {}^e \underline{\mathbf{u}}^r. \quad (3.63)$$

Allgemeine Verbundmatrizen  $\underline{\mathbf{V}}$  bzw. Verbundmatrizen  ${}^e \underline{\mathbf{V}}$ , die entsprechend der oberen Vorindizierung durch „e“ Verschiebungsvektoren eines gesamten finiten Elementes miteinander verknüpfen, werden im Rahmen dieser Arbeit später noch weitere eingeführt. Die obere Nachindizierung durch „0“ kennzeichnet die spezielle Verbundmatrix für den Sonderfall des vollen Verbundes aller Schichten miteinander. Man erhält in matrizieller Schreibweise mit den Vektoren (3.52) und (3.62):

$$\left[ \begin{array}{c} {}^1_0 \mathbf{u}_1 \\ {}^1_1 \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ {}^1_{d_1} \mathbf{u}_1 \\ {}^1_0 \mathbf{u}_2 \\ {}^1_1 \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ {}^1_0 \mathbf{u}_L \\ \dots \\ {}^9_{d_{ns}} \mathbf{u}_{ns} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & {}^1 H_1 & \dots & ({}^1 H_1)^{d_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & {}^1 H_1 & \dots & ({}^1 H_1)^{d_1} & 0 & {}^1 H_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \otimes \underline{\mathbf{1}} \left[ \begin{array}{c} {}^1_0 \mathbf{u}_1 \\ {}^1_1 \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ {}^1_{d_1} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \\ {}^1_1 \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ {}^9_{d_{ns}} \mathbf{u}_{ns} \end{array} \right], \quad (3.64)$$

womit die quadratische Verbundmatrix  ${}^e \underline{\mathbf{V}}^0$  für das spezielle finite Mehrschichtenelement identifiziert ist. Durch  $\underline{\mathbf{1}}$  wird wiederum die  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix angegeben. Durch  ${}^e H_L$  wird die Dicke

der Schicht  $L$  am Knoten  $e$  repräsentiert, wobei in (3.64) nur Matrixelemente dargestellt sind, die Dicken von Schichten am Knoten 1 enthalten. Die Spalten in der Verbundmatrix, die komplett mit Nullelementen belegt sind, gehören zu den Zeilen mit Nullelementen im reduzierten Spaltenvektor. Die Verbundmatrix ist nicht symmetrisch. Die Determinante

$$\det {}^e\underline{\mathbf{V}}^0 = 0 \quad (3.65)$$

verschwindet, d. h. eine Umkehrung der Verknüpfung in (3.63) ist nicht möglich.

### Verbundmatrix am Integrationspunkt des mehrschichtigen finiten Elementes.

Die Beziehung (3.63) kann analog am Integrationspunkt des mehrschichtigen finiten Elementes, vgl. (3.49), angegeben werden:

$$\underline{\mathbf{u}}^v = \underline{\mathbf{V}}^0 (\Theta_1^1, \Theta_1^2) \underline{\mathbf{u}}^r, \quad (3.66)$$

womit die quadratische Verbundmatrix  $\underline{\mathbf{V}}^0 (\Theta_1^1, \Theta_1^2)$  für alle Punkte  ${}_0P_1$ , die ggf. die Integrationspunkte in der Schalenreferenzfläche sind, des speziellen finiten Mehrlagenelementes identifiziert ist. Die o. g. Eigenschaften für die Verbundmatrix, u. a. (3.65), gelten analog.

- Diese Beziehung lässt sich beispielhaft für ein dreischichtiges Schalenelement mit einem Direktor je Schicht folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix} {}_0\mathbf{u}_1 \\ {}_1\mathbf{u}_1 \\ {}_0\mathbf{u}_2 \\ {}_1\mathbf{u}_2 \\ {}_0\mathbf{u}_3 \\ {}_1\mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \underline{\mathbf{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{u}_1 \\ {}_1\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \\ {}_1\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{0} \\ {}_1\mathbf{u}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

### 3.3.4 Elementmatrizen und -spaltenvektoren des finiten Mehrlagenelementes bei vollem Verbund

Gleichung (3.63) in (3.51) eingesetzt, liefert:

$$\delta ({}^e\underline{\mathbf{u}}^r)^T ({}^e\underline{\mathbf{V}}^0)^T {}^e\underline{\mathbf{f}}^v + \delta ({}^e\underline{\mathbf{u}}^r)^T ({}^e\underline{\mathbf{V}}^0)^T {}^e\underline{\mathbf{K}}_T^v {}^e\underline{\mathbf{V}}^0 {}^e\underline{\mathbf{u}}^r - \delta ({}^e\underline{\mathbf{u}}^r)^T ({}^e\underline{\mathbf{V}}^0)^T {}^e\underline{\mathbf{F}}_a^v = 0. \quad (3.68)$$

Darin werden die reduzierte tangentialsteifigkeitsmatrix

$${}^e\underline{\mathbf{K}}_T^r = ({}^e\underline{\mathbf{V}}^0)^T {}^e\underline{\mathbf{K}}_T^v {}^e\underline{\mathbf{V}}^0 \quad (3.69)$$

und der reduzierte Spaltenvektor der inneren Knotenkräfte

$${}^e\underline{\mathbf{f}}^r = ({}^e\underline{\mathbf{V}}^0)^T {}^e\underline{\mathbf{f}}^v \quad (3.70)$$

eingeführt. Beide Größen korrespondieren jeweils mit dem reduzierten Spaltenvektor  ${}^e\underline{\mathbf{u}}^r$  aller Knotenverschiebungsfreiwerte des finiten Elementes. Zur Berechnung der reduzierten Matrizen  ${}^e\underline{\mathbf{K}}_T^r = {}^e\underline{\mathbf{K}}_T^r ({}^e\underline{\mathbf{u}}^r)$  und  ${}^e\underline{\mathbf{f}}^r = {}^e\underline{\mathbf{f}}^r ({}^e\underline{\mathbf{u}}^r)$  werden die vollständige tangentialsteifigkeitsmatrix  ${}^e\underline{\mathbf{K}}_T^v ({}^e\underline{\mathbf{u}}^r)$  und der vollständige Spaltenvektor der inneren Knotenkräfte  ${}^e\underline{\mathbf{f}}^v ({}^e\underline{\mathbf{u}}^r)$ , die jeweils Funktionen von allen eingeführten Freiwerten  ${}^f_m u_{jL}$  sind, unter Berücksichtigung der Bedingung (3.56) berechnet. Durch

$${}^e\underline{\mathbf{F}}_a^r = ({}^e\underline{\mathbf{V}}^0)^T {}^e\underline{\mathbf{F}}_a^v \quad (3.71)$$

wird der Spaltenvektor der äußeren Knotenkräfte, der mit dem reduzierten Spaltenvektor aller Knotenverschiebungsfreiwerte des finiten Elementes korrespondiert, eingeführt. Mit (3.69), (3.70) und (3.71) wird das zu lösende Gleichungssystem (3.68) zu:

$${}^e\underline{\mathbf{f}}^r + {}^e\underline{\mathbf{K}}_T^r {}^e\underline{\mathbf{u}}^r - {}^e\underline{\mathbf{F}}_a^r = 0. \quad (3.72)$$

### 3.4 Randbedingungen

Bedingungen für die Lagerung des finiten Ein- oder Mehrschichtenelementes, die ihre Gültigkeit in der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$  haben, können, wie in der Methode der finiten Elemente üblich, durch Unterbinden einzelner Verschiebungen, also durch das Entfernen von Freiwerten aus dem zu lösenden Gleichungssystem in einfacher Weise formuliert werden. Zu beachten ist, dass diese Freiwerte bei der oberflächenorientierten Schalentheorie in der Oberfläche des Schalenkörpers eingeführt sind und die Randbedingungen damit ebenfalls an der Oberfläche vorgegeben werden. Sollen hinsichtlich der Kinematik anspruchsvollere Randbedingungen formuliert werden, besteht neben der Möglichkeit des Einbringens von Nebenbedingungen durch LAGRANGE-Multiplikatoren oder dem Penalty-Verfahren, folgende weitere Möglichkeit.

#### 3.4.1 Randbedingungsmatrix

Das Prinzip der Verbundmatrix, die das Koppeln von Freiheitsgraden für den Schichtenverbund gewährleistet, wird auf das Formulieren von Randbedingungen, die ihre Gültigkeit nicht in der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$  haben, übertragen. Die Verschiebungen der Referenzflächen-Ortsvektoren aller Schichten, außer der der ersten Schicht, treten wegen der Verbundeigenschaften in den reduzierten Spaltenvektoren der Verschiebungen nicht explizit auf, wie im Abschnitt 3.3 gezeigt wurde. Darüber hinaus treten in den reduzierten Spaltenvektoren zusätzlich diejenigen Verschiebungen der Direktoren nicht mehr auf, die durch die Formulierung von speziellen Randbedingungen eliminiert werden.

Um im Rahmen der Finite-Elemente-Methode spezielle Lagerungsbedingungen zu realisieren, wird auf das Koppeln von Freiheitsgraden durch die im Zusammenhang mit Mehrschichtenkinematiken eingeführten Verbundmatrizen  ${}^e\mathbf{V}^0$ , vgl. in (3.63) und (3.64), eines finiten Elementes zurückgegriffen, die für die Formulierung von Randbedingungen an einzelnen Knoten des finiten Elementes angepasst werden. Durch die Randbedingung wird der reduzierte Vektor der Verschiebungsfreiwerte  ${}^e\mathbf{u}^r$  des finiten Elementes mit dem vollständigen Vektor der Verschiebungsfreiwerte  ${}^e\mathbf{u}^v$  des finiten Elementes verknüpft:

$${}^e\mathbf{u}^v = {}^e\mathbf{R} {}^e\mathbf{u}^r. \quad (3.73)$$

Der infolge Randbedingungen reduzierte Vektor der Verschiebungsfreiwerte  ${}^e\mathbf{u}^r$  enthält neben den Nullelementen in (3.62) ggf. weitere entsprechend der jeweils formulierten Randbedingung. Die Randbedingungsmatrizen  ${}^e\mathbf{R}$  werden in gleicher Weise wie die Verbundmatrix in (3.69), (3.70) und (3.71) zur Transformation der vollständigen Element-Spaltenvektoren (3.53) und (3.54) und der Element-Steifigkeitsmatrix (3.55) eingesetzt: So werden die infolge Randbedingungen reduzierte tangentielle Steifigkeitsmatrix

$${}^e\mathbf{K}_T^r = ({}^e\mathbf{R})^T {}^e\mathbf{K}_T^v {}^e\mathbf{R}, \quad (3.74)$$

der infolge Randbedingungen reduzierte Spaltenvektor der inneren Knotenkräfte

$${}^e\mathbf{f}^r = ({}^e\mathbf{R})^T {}^e\mathbf{f}^v \quad (3.75)$$

und der infolge Randbedingungen reduzierte Spaltenvektor der äußeren Knotenkräfte

$${}^e\mathbf{F}_a^r = ({}^e\mathbf{R})^T {}^e\mathbf{F}_a^v \quad (3.76)$$

erhalten, die in (3.51) eingesetzt werden, um das zu lösende Gleichungssystem (3.72) zu formulieren. Zur Berechnung der reduzierten Matrizen  ${}^e\mathbf{K}_T^r = {}^e\mathbf{K}_T^r({}^e\mathbf{u}^r)$  und  ${}^e\mathbf{f}^r = {}^e\mathbf{f}^r({}^e\mathbf{u}^r)$  werden

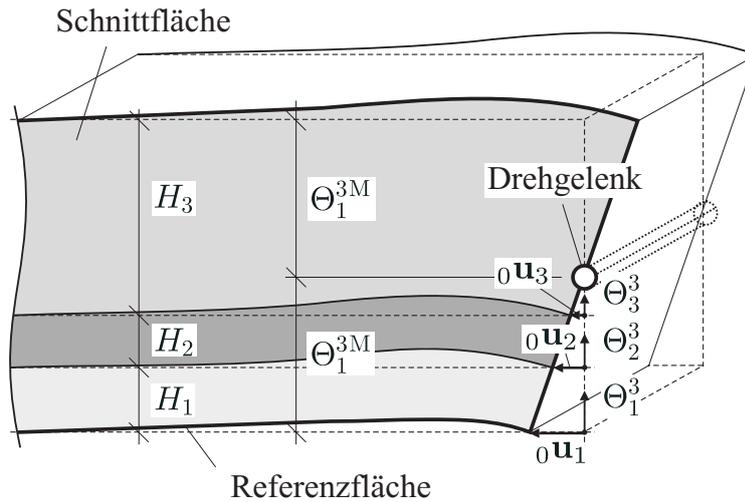


Abbildung 3.10: Drehgelenk in der Mitte des Schalenkörpers

die vollständige tangentielle Steifigkeitsmatrix  ${}^e\mathbf{K}_T^v({}^e\mathbf{u}^r)$  und der vollständige Spaltenvektor der inneren Knotenkräfte  ${}^e\mathbf{f}^v({}^e\mathbf{u}^r)$ , die jeweils Funktionen von allen eingeführten Freiwerten  ${}^f_m u_{jL}$  sind, unter Berücksichtigung der Randbedingung berechnet. Durch die Randbedingungsmatrizen sind generell nur lineare Kopplungen zwischen Kinematen möglich. Bedingungen, in denen die Kinematen quadratisch, kubisch oder zu höherer Potenz miteinander verknüpft werden, können damit nicht formuliert werden.

Die Randbedingungen werden im Rahmen der Finite-Element-Methode an einzelnen Element-Knotenpunkten durch das Koppeln der an einem Knoten vorhandenen Knotenfreiheitsgrade formuliert.

### 3.4.2 Gelenkig feste und gelenkig querverschiebliche Lagerung – bleibender Verbund im Lagerbereich

Die in (3.73) eingeführte Randbedingungsmatrix wird im Folgenden exemplarisch für eine hinsichtlich der Kinematik anspruchsvolle Randbedingung aufgebaut. Bei diesem Beispiel werden die Randbedingungen für die Schale im Ausgangszustand formuliert, d. h. im Zustand, in dem zwischen allen Schichten vollständiger Verbund besteht. Für den Bereich innerhalb eines finiten Elementes, für den diese Randbedingungen formuliert werden, die ihre Gültigkeit nicht in der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$  haben, wird der vollständige Verbund während des gesamten Belastungsprozesses angenommen. Soll an einem ein- oder mehrschichtigen finiten Element in einem Punkt eine gelenkige Lagerung nicht in der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$  gelten, sondern im Abstand  $\Theta_1^{3M}$  senkrecht zu dieser entfernt, also zum Beispiel in der Mitte der Schalendicke, was der Index „M“ andeutet, lässt sich das nicht direkt durch Vorgabe von Freiwerten in dem zu lösenden Gleichungssystem formulieren. Dafür ist es notwendig, die Steifigkeitsmatrix des finiten Elementes anders als durch die Transformation mit der Verbundmatrix zu verändern. Da, wie oben erwähnt, durch die Randbedingungsmatrizen generell nur lineare Kopplungen zwischen Kinematen möglich sind, bleibt bei einem durch diese Methode realisierten Drehgelenk der Schalenquerschnitt im Gelenkbereich eben. Zudem eignet sich die folgende einfache Formulierung eines Gelenkes nicht für große Rotationen um die Gelenkachse. Eine weitere Einschränkung für das vorgestellte Gelenk soll aus Gründen der Übersichtlichkeit dahingehend vorgenommen werden, dass die im Rahmen der Finite-Element-Methode in Richtung des Basisvektors  $\mathbf{e}^i$  des einbettenden kartesischen Koordinatensystems eingeführten Verschiebungsfreiheitsgrade, vgl. (3.39), an den einzelnen

Elementknoten direkt gekoppelt werden. Das heißt, die Gelenkbedingung soll zunächst nur global, also in Richtung eines Basisvektors  $e^i$  eingebracht werden, vgl. Abb. 3.10, so dass die Gelenkachse nicht an den Verlauf einer krummlinigen Elementkante angenähert werden kann. Das Vorgehen zur Erweiterung auf eine lokale Formulierung wird anschließend kurz angesprochen werden. Im Folgenden werden die Randbedingungen eines festen oder querverschieblichen Drehgelenklagers in der Mitte der Schalendicke an einem beliebigen Element-Knotenpunkt eines finiten Elementes formuliert und die zugehörige Randbedingungsmatrix für ein finites Element angegeben, bei dem ein Element-Knotenpunkt in der beschriebenen Weise gelenkig gelagert ist.

Die Verschiebungen, die im Gelenk am Element-Knotenpunkt  ${}^e_0P_1(\Theta_1^1, \Theta_1^2)$  entlang der  $\Theta_1^3$ -Linie auftreten, werden nur mit Hilfe des Referenzflächen-Verschiebungsvektors und der 1. Direktoren jeder Schicht formuliert. Letztere werden durch die Kopplungen mit Hilfe der Randbedingungsmatrix alle auf den Referenzflächen-Verschiebungsvektor zurückgeführt, so dass nur der Freiheitsgrad in Richtung des Basisvektors  $e^i$  dieses einen Verschiebungsvektors im reduzierten Spaltenvektor der Verschiebungsfreiwerte unabhängig ist, d. h. im Gleichungssystem verbleibt.

Die Referenzfläche der Schicht  $\mathcal{B}_1$  dient als Bezugsfläche für die Beschreibung der Lage des Drehgelenkes, das in den Koordinaten dieser Schicht sich an der Stelle  $\Theta_1^3 = \Theta_1^{3M}$  befindet. Ist das Gelenk in der Mitte der Schalendicke, gilt

$$\Theta_1^{3M} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{n_S} H_K \quad (3.77)$$

mit  $n_S$  als Anzahl aller Schichten und  ${}^eH_L = H_L$ . Da durch die Randbedingungsmatrix Verschiebungen, die auf das einbettende raumfeste kartesische Koordinatensystem bezogen sind, gekoppelt werden, ist zu beachten, dass sich die nachfolgend formulierten Bedingungen zunächst auf eine beliebige der drei Raumrichtungen  $e_i$  auswirkt. An Stelle der Knotenpunkt-Verschiebungen der anderen beiden Richtungen werden für eine gelenkig feste Lagerung im reduzierten Spaltenvektor der Verschiebungsfreiwerte Nullelemente eingetragen, d. h. sie werden aus dem zu lösenden Gleichungssystem entfernt. Für die gelenkig querverschiebliche Lagerung verbleiben die Knotenpunkt-Verschiebungen der anderen beiden Richtungen in dem zu lösenden Gleichungssystem und werden durch die Randbedingungsmatrix nicht beeinflusst. Die Richtung  $e_i$ , für die die Bedingung formuliert wird, sollte nicht mit der Dickenrichtung der Schale zusammenfallen, da sonst an Stelle einer Drehgelenkwirkung die Dickenänderungen der Schichten in ein festes Verhältnis zueinander gebracht würden. Mit Hilfe des Strahlensatzes ergibt sich für kleine Drehbewegungen um den Punkt  $P(\Theta_1^1, \Theta_1^2, \Theta_1^{3M})$  und nur kleine Dickenänderungen der Schichten die lineare Abhängigkeit der Referenzflächenverschiebungen in die Richtungen  $e_i$ :

$$\frac{{}^e_0u_{i1}}{\Theta_1^{3M}} = \frac{{}^e_0u_{i2}}{\Theta_1^{3M} - H_1} = \frac{{}^e_0u_{i3}}{\Theta_1^{3M} - H_1 - H_2} = \frac{{}^e_0u_{iL}}{\Theta_1^{3M} - \left( \sum_{K=1}^{L-1} H_K \right)}. \quad (3.78)$$

Die Referenzflächenverschiebungen jeder Schicht  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  lassen sich demnach durch

$${}^e_0u_{iL} = \left( 1 - \left( \sum_{K=1}^{L-1} H_K \right) (\Theta_1^{3M})^{-1} \right) {}^e_0u_{i1} \quad (3.79)$$

als Vielfache der Referenzflächenverschiebung  ${}^e_0u_{i1}$  der Schicht  $\mathcal{B}_1$  ausdrücken. Mit der Kinematik (3.57) des vollständigen Verbundes zwischen allen Schichten, der an einem solchen Gelenk für den gesamten Verformungsprozess vorausgesetzt wird, gilt auch

$${}^e_0u_{iL} = {}^e_0u_{i1} + \sum_{K=1}^{L-1} H_K {}^e_1u_{iK}, \quad (3.80)$$

was zusammen mit (3.79) auf

$${}^e_1 u_{iL} = -\frac{{}^e_0 u_{i1}}{\Theta_1^{3M}} \quad (3.81)$$

führt. Das beschreibt den Anstieg der um die Gelenkachse geneigten Querschnittsebene, der für jede Schicht gleich ist. Gilt diese Gelenkbedingung in Richtung des Basisvektors  $e^i$  z. B. am Element-Knotenpunkt  ${}^1_0 P$ , vgl. (2.208), kann Gleichung (3.73) matriziell wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} {}^1_0 \mathbf{u}_1 \\ {}^1_1 \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ {}^1_{d_1} \mathbf{u}_1 \\ {}^1_0 \mathbf{u}_2 \\ {}^1_1 \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ {}^1_0 \mathbf{u}_L \\ \dots \\ {}^9_{d_{n_s}} \mathbf{u}_{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -(\Theta_1^{3M})^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 - H_1 (\Theta_1^{3M})^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -(\Theta_1^{3M})^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 1 - \left( \sum_{K=1}^{L-1} H_K \right) (\Theta_1^{3M})^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \otimes \underline{\mathbf{1}}_i \begin{bmatrix} {}^1_0 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

mit

$$\underline{\mathbf{1}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{1}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{1}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

Die Maßzahlen der Verschiebungen in den Spaltenvektoren in (3.82) werden wie in (3.39) bezüglich der Basis  $e_i$  dargestellt, so dass mit  $i = 1$  in (3.82) durch  $\underline{\mathbf{1}}_1$  die erste Maßzahl von  ${}^1_0 \mathbf{u}_1$ , und zwar  ${}^1_0 u_{11}$ , angesprochen wird, mit  $i = 2$  in (3.82) durch  $\underline{\mathbf{1}}_2$  die zweite Maßzahl von  ${}^1_0 \mathbf{u}_1$ , und zwar  ${}^1_0 u_{21}$ , angesprochen wird und analog mit  $i = 3$  die dritte ( ${}^1_0 u_{31}$ ). Man vergleiche die entstandene Randbedingungsmatrix mit der Verbundmatrix in (3.64). Die formulierte Randbedingung kann z. B. an zwei benachbart oder 3 in Reihe liegenden Element-Knotenpunkten des finiten Elementes angewendet werden. Im reduzierten Vektor der Verschiebungsfreiwerte  ${}^e \underline{\mathbf{u}}^f$  des finiten Elementes in (3.82) verbleiben z. B. bei 3 gelenkig fest gelagerten Elementknoten die Verschiebungen  ${}^1_0 u_{i1}$ ,  ${}^8_0 u_{i1}$ ,  ${}^4_0 u_{i1}$  oder  ${}^4_0 u_{i1}$ ,  ${}^7_0 u_{i1}$ ,  ${}^3_0 u_{i1}$  oder  ${}^3_0 u_{i1}$ ,  ${}^6_0 u_{i1}$ ,  ${}^2_0 u_{i1}$  oder  ${}^2_0 u_{i1}$ ,  ${}^5_0 u_{i1}$ ,  ${}^1_0 u_{i1}$ .

Um bei krummlinigen Elementrändern die Gelenkachse dem Verlauf der Elementkanten anpassen zu können, ist es naheliegend, die Gelenkwirkung bezüglich einer der Richtungen  $\mathbf{A}_1^\alpha$  der Schalenreferenzfläche vorzuschreiben. Dadurch können Zwängungen durch die Lagerung hervorgerufen werden. Stellt man die Gelenkbedingungen (3.79) und (3.80) mit den in Abb. 3.10 dargestellten Verschiebungsvektoren

$${}^e \mathbf{u}_L = {}^e_0 u_{iL} \mathbf{e}^i = {}^e_0 \bar{u}_{\alpha L} \mathbf{A}_L^\alpha = {}^e_0 \bar{u}'_{\alpha L} \mathbf{A}_1^\alpha, \quad \text{wobei} \quad {}^e_0 \bar{u}'_{\alpha 1} = {}^e_0 \bar{u}_{\alpha 1}, \quad (3.84)$$

durch deren Maßzahlen  ${}^e_0 \bar{u}'_{\alpha L}$  bezüglich der Basis  $\mathbf{A}_1^\alpha$  dar, kann analog (3.73) eine Beziehung

$${}^e \underline{\mathbf{u}}^v = {}^e \bar{\mathbf{R}} {}^e \underline{\mathbf{u}}^r. \quad (3.85)$$

formuliert werden, die matriziell analog (3.82) durch

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_{11} \\ \overline{u}_{21} \\ \overline{u}_{31} \\ \vdots \\ \overline{u}_{\alpha 1} \\ \vdots \\ \overline{u}'_{\alpha L} \\ \vdots \\ \overline{u}'_{\alpha L} \\ \vdots \\ \overline{u}'_{3 n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \dots \\ \vdots & \dots \\ \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \dots \\ 1 - \left( \sum_{K=1}^{L-1} H_K \right) (\Theta_1^{3M})^{-1} & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \dots \\ - (\Theta_1^{3M})^{-1} & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \otimes \underline{\mathbf{1}}_{\alpha} \begin{bmatrix} \overline{u}_{11} \\ \overline{u}_{21} \\ \overline{u}_{31} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

geschrieben werden kann. Die Überstriche an den Größen in (3.85) zeigen an, dass die Elemente der Spaltenvektoren auf die Basis  $\mathbf{A}_1^{\alpha}$  bezogene Verschiebungsmaßzahlen sind und der Randbedingungsmatrix eine lokale Formulierung zu Grunde liegt. Die Verschiebungsmaßzahlen können mit Hilfe der Transformationsbeziehung

$$\overline{u}'_{\alpha L} = {}^e u_{iL} \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{A}_{\alpha 1} \quad (3.87)$$

durch Verschiebungsmaßzahlen geschrieben werden, die auf das einbettende kartesische Koordinatensystem bezogen sind. Diese Beziehung liegt der quadratischen Transformationsmatrix  ${}^e \underline{\mathbf{T}}$  zugrunde, so dass

$${}^e \underline{\mathbf{u}}^v = {}^e \underline{\mathbf{T}} {}^e \underline{\mathbf{u}}^v, \quad {}^e \underline{\mathbf{u}}^r = {}^e \underline{\mathbf{T}} {}^e \underline{\mathbf{u}}^r \quad (3.88)$$

gelte, womit Gleichung (3.73) zu

$${}^e \underline{\mathbf{u}}^v = {}^e \underline{\mathbf{T}}^{-1} {}^e \underline{\mathbf{R}} {}^e \underline{\mathbf{T}} {}^e \underline{\mathbf{u}}^r \quad (3.89)$$

mit der Randbedingungsmatrix

$${}^e \underline{\mathbf{R}} = {}^e \underline{\mathbf{T}}^{-1} {}^e \underline{\mathbf{R}} {}^e \underline{\mathbf{T}} \quad (3.90)$$

erhalten werden kann. In  ${}^e \underline{\mathbf{u}}^r$  müssen für das feste gelenkige Lager wiederum zwei der drei Verschiebungsfreiwerte  ${}^1 u_{i1}$  mit Nullelementen belegt, das heißt, für die Lösung des Gleichungssystems zunächst entfernt werden. Sie sind vollständig abhängig von den verbleibenden Verschiebungsfreiwerten und können nach der Lösung des Gleichungssystems durch die formulierten Randbedingungen berechnet werden.

### 3.4.3 Gelenkig feste und gelenkig querverschiebliche Lagerung – fehlender Verbund im Lagerbereich

Im vorangegangenen Beispiel wurden die Randbedingungen für die Schale im Ausgangszustand formuliert, d. h. im Zustand, in dem zwischen allen Schichten vollständiger Verbund besteht. Soll der vollständige Verbund für den Bereich innerhalb eines finiten Elementes, für den Randbedingungen formuliert werden, die ihre Gültigkeit nicht in der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_1$  haben, nicht mehr für den gesamten Belastungsprozess des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens angenommen werden, ist mit dem Verlust des Verbundes auch die Randbedingungsmatrix anzupassen. Dabei ist dann an Stelle von (3.80) die entsprechende Kinematik, die in Abschnitt 4 eingeführt wird, anzuwenden.

### 3.5 Numerische Beispiele

#### 3.5.1 Kragbalken – Versteifungseffekte

Im Allgemeinen weisen finite Elemente, die, wie das hier vorgestellte, reine Verschiebungselemente sind, in bestimmten Situationen ein zu steifes Elementverhalten auf, das unter dem Begriff „locking“ bekannt ist. Entsprechend ihrer Ursache aus mechanischer Sicht, werden verschiedene Arten der Versteifungseffekte benannt. Eine übersichtliche Klassifizierung befindet sich u. a. in [ECKSTEIN 1999], [BISCHOFF 1999], [SCHLEBUSCH 2005]:

1. Querschub-Locking (engl.: transverse shear locking)
2. Dicken-Locking gekrümmter Elemente (kurz: Krümmungs-Locking) (engl.: curvature thickness locking)
3. POISSON-Dicken-Locking (engl.: POISSON thickness locking)
4. Membran-Locking (engl.: membrane locking)
5. Schub-Locking (engl.: in-plane shear locking)
6. Volumen-Locking oder POISSON-Locking (engl.: volume locking)

Dabei sind aus Spannungen bzw. Verzerrungen, die in der exakten dreidimensionalen Lösung des kontinuumsmechanischen Problems nicht vorkommen, resultierende Energien die Ursache einer zusätzlichen, künstlichen Steifigkeit des Elementes. In der Literatur werden zahlreiche „locking“-vermeidende Maßnahmen genannt: die selektive reduzierte Integration, die Assumed Natural Strain (ANS)-Methode, die Diskrete Shear Gap (DSG)-Methode, die Methode der inkompatiblen Moden, oder die Enhanced Assumed Strain (EAS)-Methode. Diese Maßnahmen basieren darauf, die kinematischen Ansätze durch Entfernen oder Ergänzen von Spannungs- oder Verzerrungsanteilen in der Schalenformulierung anzupassen, um die aus mechanischer Sicht erforderlichen Spannungs- oder Verzerrungszustände durch das finite Element erhalten zu können.

In [SCHLEBUSCH 2005] wird erwähnt, dass das Verhältnis der zusätzlichen Steifigkeit aus „locking“ zur Gesamtsteifigkeit des Elementes in Abhängigkeit eines jeweiligen Parameters gegen Unendlich gehen kann. Dieser Parameter ist beim Querschub-Locking die Dicke und beim POISSON-Dicken- bzw. Volumen-Locking bei Verwendung isotropen Materials die Querkontraktionszahl.

Je mehr Reihenglieder im Verschiebungsansatz (2.42) mitgeführt werden, desto besser wird das tatsächliche Verschiebungsverhalten des Schalenkontinuums approximiert, desto mehr tritt auch die Bedeutung des „locking“ in den Hintergrund. Durch mehrschichtige Schalenmodelle wird das tatsächliche Verschiebungsverhalten des Schalenkontinuums mit zunehmender Schichtenanzahl ebenfalls immer besser approximiert. In [BRAUN et al. 1994] wird darauf hingewiesen, dass insbesondere das Dicken-Locking mit zunehmender Schichtenanzahl verschwindet. Bereits lineare Verschiebungsansätze, die auf konstante Verzerrungen in Dickenrichtung innerhalb jeder Schicht führen, können einen über die Gesamtdicke der mehrschichtigen Schale linear veränderlichen Verzerrungsverlauf in Dickenrichtung gut annähern. Da im Rahmen dieser Arbeit zum Zweck der Untersuchung von Verbundverhalten Mehrschichten-Schalenmodelle mit mindestens zwei Schichten eingesetzt werden, die zudem wegen dem Erfordernis einer ausreichend genauen Spannungsrechnung im Schalenkontinuum auf Multidirektor-Ansätzen beruhen, werden wegen der damit verbundenen hohen Anzahl von Verschiebungsfreiwerten die „locking“-Effekte also nur von geringer Bedeutung sein, so dass hier keine zusätzlichen „locking“-vermeidenden Maßnahmen getroffen werden müssen.

Die Eigenschaften hinsichtlich der Güte der Approximation des Verschiebungsfeldes der in den vorangegangenen Abschnitten eingeführten Mehrschichten-Multidirektor-Schalentheorie und der beschriebenen FE-Umsetzung soll anhand eines eingespannten Kragträgers aufgezeigt werden, der

in [BRAUN et al. 1994] für den Vergleich von 5-, 6- und 7-Parameter-Schalentheorien herangezogen wurde.

### Dicker Kragbalken: Last über Dicke verteilt.

In einem ersten Beispiel wird ein Kragbalken mit den Abmessungen  $l = 10 \text{ cm}$ ,  $h = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 1 \text{ cm}$ , vgl. Abb. 3.11, mit einem isotropen Material (Elastizitätsmodul  $E = 100000 \text{ N/cm}^2$ , Querdehnzahl  $\nu = 0,4$ ) untersucht. Am Balkenende wird die Gesamtlast  $p = 100 \text{ N/cm}$  eingetra-

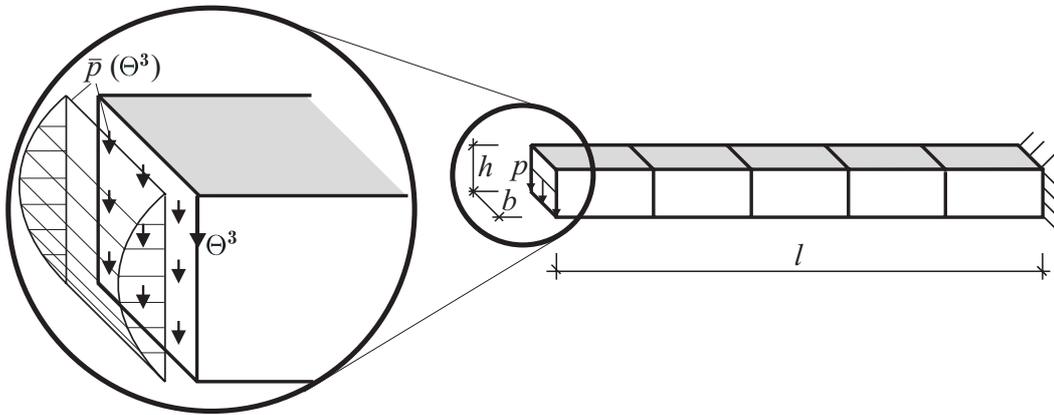


Abbildung 3.11: Kragbalken ( $l = 10 \text{ cm}$ ,  $h = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 1 \text{ cm}$ ,  $p = 100 \text{ N/cm}$ )

gen, deren Verteilung über die Dicke auf der Stirnfläche des Balkens, wie im Detail der Abb. 3.11 dargestellt, durch die quadratische Funktion

$$\bar{p}(\Theta^3) = 6p \left( \frac{1}{4} - \left( \Theta^3 - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \frac{1}{\text{cm}} \quad (3.91)$$

beschrieben wird. Der zu dem Lastvektorfeld  $\mathbf{F}_a = \bar{p} \mathbf{A}_3$  gehörende Spaltenvektor der Direktorkräfte wird mit Hilfe von Gleichung (2.167) zu

$$\underline{\mathbf{F}}_a = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ \Theta^3 \\ (\Theta^3)^2 \\ (\Theta^3)^3 \end{bmatrix} \otimes \bar{p}(\Theta^3) \mathbf{A}_3 d\Theta^3 = \begin{bmatrix} p \\ 0,5p \\ 0,3p \\ 0,2p \end{bmatrix} \otimes \mathbf{A}_3. \quad (3.92)$$

Die Berechnung erfolgt mit 5 finiten einschichtigen Schalenelementen mit je 3 Direktoren. Die Schalenreferenzfläche ist in Abb. 3.11 grau dargestellt. Beim Vergleich der durch eine geometrisch lineare Finite-Element-Berechnung erhaltenen Durchbiegung am Kragarmende mit der Referenzlösung nach Balkentheorie bei Berücksichtigung des Schubanteils wird eine Abweichung von 1,75% von der analytischen Lösung

$$w = \frac{pbl^3}{3EI} + \frac{6pbl}{5Gbh} = 4,0336 \text{ cm} \quad (3.93)$$

mit  $I = bh^3/12$  und  $G = E/(2(1+\nu))$  ermittelt. Damit ist eine gute Übereinstimmung erzielt worden. Die Berechnung weist keine Versteifungseffekte auf. Die Berechnung erfolgt im Weiteren geometrisch nichtlinear.

### Dicker und dünner Kragbalken: Last an Unterkante, unterschiedliche Anzahl von Freiheitsgraden.

In einem zweiten Beispiel werden die FE-Lösungen bei Verwendung unterschiedlicher Anzahl von Schichten und Direktoren miteinander verglichen. Bei den Untersuchungen werden „locking“-Effekte und numerische Effekte gleichzeitig betrachtet. Es handelt sich dabei um Krag-

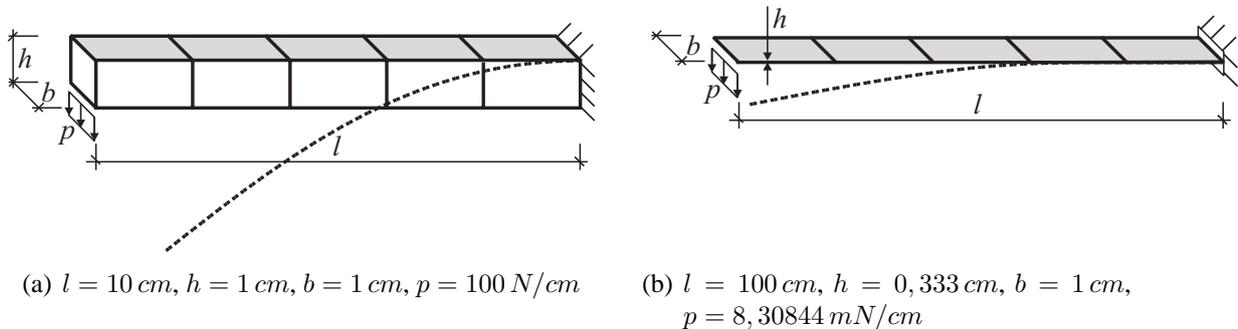


Abbildung 3.12: Kragbalken gleichen Materials und gleicher Elementierung

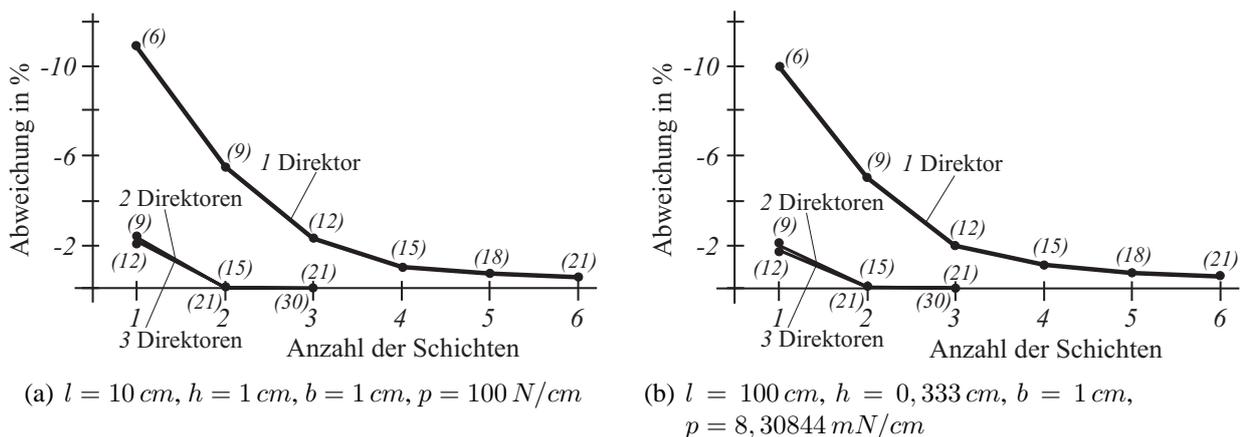


Abbildung 3.13: Abweichungen der Durchbiegung am Kragbalkenende in Abhängigkeit der Schichtenanzahl und der Anzahl der Direktoren bzgl.  $w_{\text{dick}}$  bzw.  $w_{\text{dünn}}$ ; Klammerwerte: Freiheitsgrade je FE-Knoten

balken, wie sie in Abb. 3.12 dargestellt sind, mit einem isotropen Material (Elastizitätsmodul  $E = 100000 \text{ N/cm}^2$ , Querdehnzahl  $\nu = 0,4$ ) und einer Breite von  $b = 1 \text{ cm}$ , die hier jeweils am Balkenende an der Balkenunterkante durch eine Vertikallast belastet sind. Die Durchbiegung des Balkenendes in der oben liegenden Schalenreferenzfläche (grau gekennzeichnet) wurde in zwei verschiedenen Geometrien und Belastungen mit jeweils 5 finiten Ein- und Mehrschichten-Schalenelementen mit unterschiedlicher Anzahl von Direktoren geometrisch nichtlinear berechnet. Die zu dem Lastvektorfeld gehörenden Direktorkräfte jeweils an der letzten Schicht wurden mit Hilfe von Gleichung (2.180) ermittelt.

Ein im Verhältnis zur Balkenlänge dicker Balken ( $l = 10 \text{ cm}$ ,  $h = 1 \text{ cm}$ ), vgl. Abb. 3.12(a), dessen Geometrie und Material dem aus dem vorangegangenen Beispiel entspricht, wurde mit einer Last  $p = 100 \text{ N/cm}$  belastet, so dass sich die Biegelinie einer Linie in der Referenzfläche so ergibt, wie als gestrichelte Linie in der Abbildung eingezeichnet (am Kragarmende nach Balkentheorie ohne Berücksichtigung der Schubverformung eine Durchbiegung von

$w_{\text{dick,analyt.}} = pb^3/(3EI) = 4,00 \text{ cm}$  bei Lasteintrag in Höhe der Mittellinie). Ein im Verhältnis zur Balkenlänge schlanker Balken ( $l = 100 \text{ cm}$ ,  $h = 0,333 \text{ cm}$ ), vgl. Abb. 3.12(b), wurde mit einer Last  $p = 8,30844 \text{ mN/cm}$  belastet, so dass sich die Biegelinie einer Linie in der Referenzfläche so ergibt, wie als gestrichelte Linie in der Abbildung eingezeichnet (am Kragarmende nach Balkentheorie ohne Berücksichtigung der Schubverformung eine Durchbiegung von  $w_{\text{dünn,analyt.}} = pb^3/(3EI) = 9,00 \text{ cm}$  bei Lasteintrag in Höhe der Mittellinie).

In Abb. 3.13 sind die Abweichungen von den jeweiligen Referenzlösungen der Durchbiegungen des Kragarmendes, und zwar jeweils in Höhe der Schalenreferenzfläche, bei den einzelnen Varianten der Berechnungen mit verschiedenen Anzahlen von Schichten und Direktoren dargestellt. Als Referenzlösung dient in Abb. 3.13(a) die Durchbiegung  $w_{\text{dick}} = 3,899 \text{ cm}$  der Referenzfläche am Kragarmende bei der Berechnung mit 3 Schichten mit jeweils 3 Direktoren und in Abb. 3.13(b) die Durchbiegung  $w_{\text{dünn}} = 8,790 \text{ cm}$  der Referenzfläche am Kragarmende bei der Berechnung mit ebenfalls 3 Schichten mit jeweils 3 Direktoren. Die verbleibenden Abweichungen von etwa  $-2\%$  gegenüber den analytischen Lösungen sind auf die Vernetzung zurückzuführen und darauf, dass die Berechnungen geometrisch nichtlinear durchgeführt wurden. Bei den Berechnungen mit einer Schicht mit einem Direktor besitzt der Balken 6 Freiheitsgrade je Knoten, bei 2 Direktoren 9 und bei 3 Direktoren 12 Freiheitsgrade je Knoten. Bei Erhöhung der Anzahl der Schichten wurde die Anzahl der Direktoren in jeder Schicht gleich belassen. Die Werte in Klammern an den einzelnen Berechnungspunkten in Abb. 3.13 geben die Anzahl der Freiheitsgrade an jedem Finite-Elementknotenpunkt bei der jeweiligen Rechnung an. Der Referenzflächen-Ortsvektor jeder Schicht  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  ist entsprechend der in Abschnitt 3.3 vorgestellten Verbundkinematik mit vollständigem Verbund mit der angrenzenden Schicht gekoppelt.

Bei den gewählten Konstellationen weisen die Ergebnisse der Abb. 3.13(a) und 3.13(b) nur geringfügige Unterschiede auf. Sie sind hinsichtlich der Verhältnisse von Belastung zu Geometrie so gewählt, dass durch das FE-Schalenmodell richtige Ergebnisse erhalten werden. Würde in den Systemen die Last erhöht oder der Balken schlanker gestaltet, wüchsen die dargestellten Abweichungen schnell an, so dass die Berechnungen unbrauchbar würden. Im System des dicken Balkens in Abb. 3.12(a) ist das erst bei im Verhältnis zur Balkenlänge größerer Durchbiegung der Fall, als im System des schlanken Balkens in Abb. 3.12(b), was auf numerische Effekte zurückzuführen ist. Die Abb. 3.13(a) und 3.13(b) zeigen, dass sich sowohl durch Erhöhung der Anzahl der Schichten, als auch durch Erhöhung der Anzahl der Direktoren und erst recht durch Erhöhung beider Größen gleichzeitig eine Verbesserung der Ergebnisse erzielen lässt und die Versteifungseffekte abnehmen, wobei die höhere Direktorkinematik, insbesondere die mit 2 Direktoren die für diesen Fall effektivste Variante zu sein scheint.

### Dicker Kragbalken: Last an Unterkante, Spannungen.

Im Folgenden werden am numerischen Beispiel 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen mit CAUCHY-Spannungen verglichen. Abbildung 3.14 zeigt auf verschiedene Weisen berechnete Hauptspannungen in Größe und Richtung angetragen in jeweils einem in der Mitte der Balkenbreite  $b$  geführten vertikalen Schnitt längs durch das System des dicken Balkens, vgl. Abb. 3.12(a). Von den drei ermittelten Hauptspannungen mit ihren senkrecht aufeinander stehenden Richtungen wurde in den Punkten des Schnittes jeweils die dargestellt, deren Richtung mit der Richtung der Balkenlängsachse den kleinsten Winkel einschließt. Der Spannungszustand in Abb. 3.14(b) wurde entsprechend den Gleichungen (2.109) und (2.111) aus dem CAUCHY-Spannungstensor (2.107) mit den Hauptspannungsrichtungen (2.112), die in den Abbildungen durch die kurzen schwarzen Linien an einigen Punkten dargestellt sind, berechnet. Der Spannungszustand in Abb. 3.14(a) wurde analog aus dem 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor (2.87) berechnet. Es ist zu erkennen, dass die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen bezüglich der Lage des Balkens im unverformten Zustand, nämlich entlang der Horizontalen, punktweise die Richtungen der an dem Balken zu erwar-

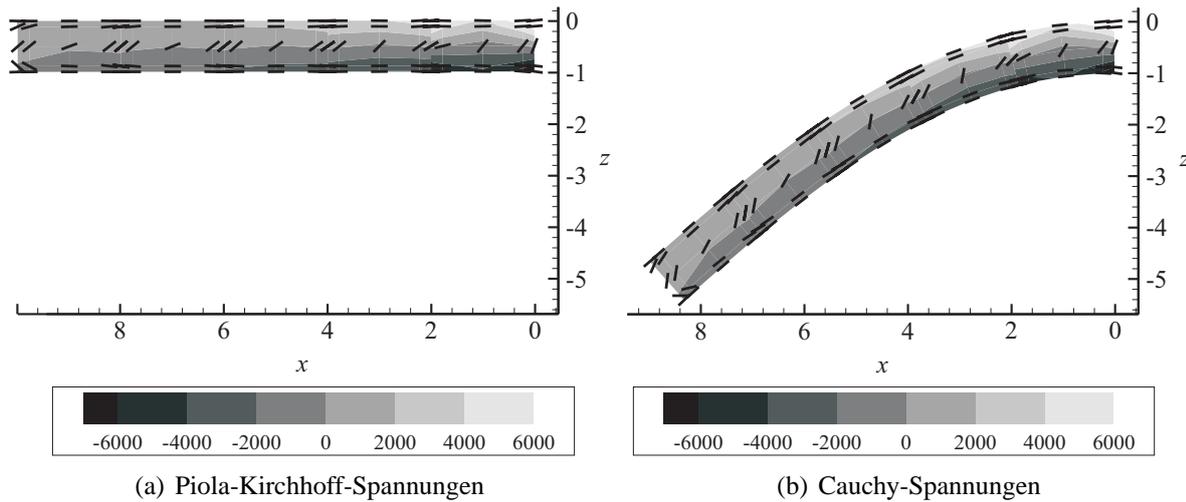


Abbildung 3.14: Hauptspannungen (Richtungen entsprechend den punktwise eingetragenen kurzen schwarzen Linien) aus dem Piola-Kirchhoff- und dem Cauchy-Spannungstensor in  $N/cm^2$  an einem Vertikalschnitt durch den Balken

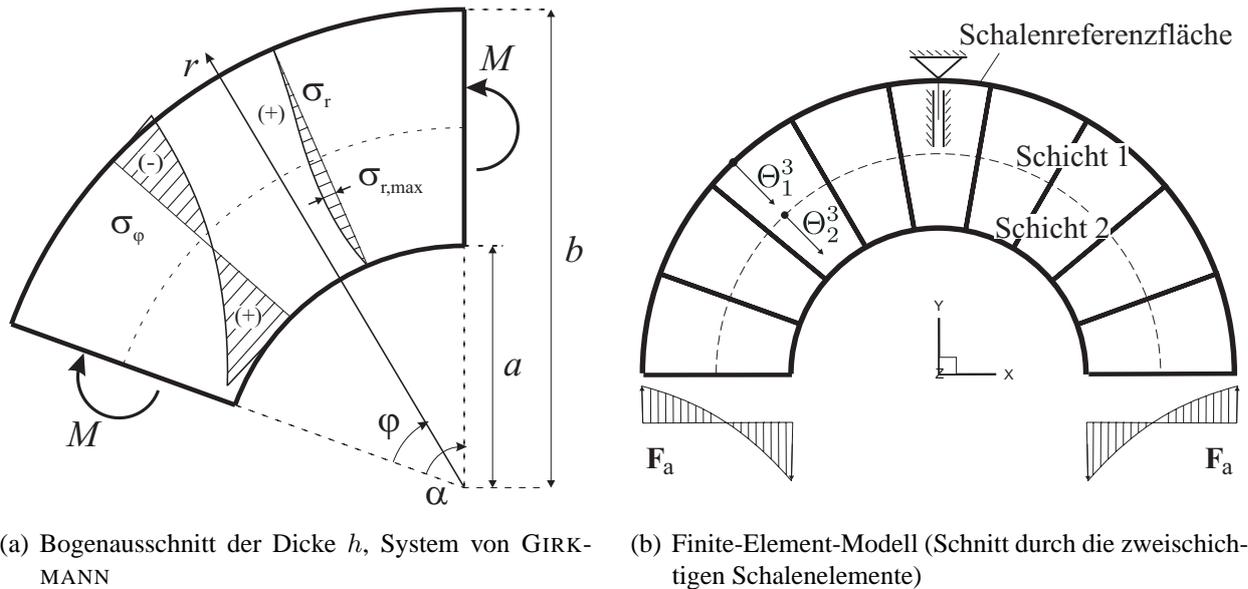
tenden Spannungstrajektorien - an der Oberseite Biegenormal-Zugspannungen, an der Unterseite Biegenormal-Druckspannungen - abbilden, während die physikalischen CAUCHY-Spannungen sie bezüglich der Lage des Balkens im verformten Zustand abbilden. In der Mittellinie, der neutralen Faser, sind die Schubspannungen aus Querkraft am größten, während die Biegenormalspannungen Null sind, was eine Verdrehung der Hauptspannungen gegen die Achsen des jeweiligen Koordinatensystems zur Folge hat. Die Richtungen dieser zwei Spannungsarten unterscheiden sich also in der dargestellten Weise, hinsichtlich der Beträge ist hier kein Unterschied zu erkennen. Die Beziehungen der Spannungstensoren zueinander sind in (2.88) angegeben. Das System besteht aus einer Schicht mit 3 Direktoren, also 12 Freiheitsgraden je Knoten. Damit ist der Verlauf der Spannungen von Referenzfläche zur gegenüberliegenden Oberfläche des Balkens durch eine quadratische Funktion approximiert. Diese hohe Güte des Spannungszustandes ist bei der späteren Ermittlung interlaminarer Spannungen von Vorteil. Hinsichtlich des Vergleiches der physikalischen Interpretierbarkeit der in (2.82) eingeführten CAUCHY- und in (2.87) eingeführten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsmaßzahlen sei auf Abschnitt 2.5.5 verwiesen.

### 3.5.2 Kreisbogenträger – Dreidimensionale Spannungszustände

Die Eigenschaften hinsichtlich der Güte der Approximation des Spannungszustandes der in den vorangegangenen Abschnitten eingeführten Mehrschichten-Multidirektor-Schalentheorie und der beschriebenen FE-Umsetzung soll anhand einer Simulation aufgezeigt werden, für die in [GIRKMANN 1963] analytische Berechnungen durchgeführt wurden, die als Vergleich dienen.

An den Rändern  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \alpha$  der in Abb. 3.15(a) dargestellten Scheibe wirken die äußeren Momente  $M$ . Um den dabei im Schalenkontinuum auftretenden Spannungszustand als einen ebenen auffassen zu können, muss die Scheibendicke  $h$  klein gegenüber den übrigen Abmessungen sein. In [GIRKMANN 1963] wird der Spannungsverlauf

$$\sigma_r = -\frac{4M}{h \left( (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2 \right)} \left( -a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + \frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} \right) \quad (3.94)$$



(a) Bogenabschnitt der Dicke  $h$ , System von GIRK-MANN (b) Finite-Element-Modell (Schnitt durch die zweischichtigen Schalenelemente)

Abbildung 3.15: Reine Biegung des Kreisbogens

für die Spannungen in Radialrichtung und

$$\sigma_\varphi = -\frac{4M}{h \left( (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2 \right)} \left( (b^2 - a^2) - a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} - \frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} \right) \quad (3.95)$$

für die Spannungen in Bogenrichtung unabhängig vom Bogenwinkel  $\alpha$  angegeben. In Abb. 3.15(a) ist der Verlauf der Spannungskomponenten  $\sigma_r$  und  $\sigma_\varphi$  für den Fall  $b = 2a$  dargestellt. Jeder Querschnitt an einer beliebigen Stelle  $\varphi$  bleibt bei der Verformung eben. Es können in der Finite-Element-Simulation überhaupt nur dann annähernd die analytisch berechneten Spannungsverläufe erwartet werden, wenn neben einer ausreichend guten Vernetzungsdichte die äußeren Momente durch das Lastvektorfeld  $\mathbf{F}_a$ , vgl. Abb. 3.15(b), entsprechend dem errechneten Verlauf von  $\sigma_\varphi$ , auf die Endquerschnitte der Scheibe übertragen werden. Ansonsten liegen Randstörungen vor, deren Einfluss sich nach dem Prinzip von DE ST.-VENANT über Randbereiche der Scheibe, deren Länge nach GIRKMANN etwa gleich der Scheibenhöhe  $b - a$  angenommen werden kann, erstreckt.

Für die Finite-Element-Simulation wird ein Bogenabschnitt mit  $\alpha = 180^\circ$  und  $a = 2,5 \text{ m}$ ,  $b = 5,0 \text{ m}$ ,  $h = 0,1 \text{ m}$  gewählt, s. Abb. 3.15(b), der mit nur 5 zweischichtigen Schalenelementen vernetzt wird. Die Schichten haben jeweils die Dicke von  $H_1 = H_2 = 1,25 \text{ m}$ . Die Lage der Schalenreferenzfläche ist bei  $r = b$  an der Bogenaußenseite. Damit ergeben sich die Schalenkoordinaten der Schichten in Abhängigkeit von der Koordinate  $r$  zu

$$\Theta_1^3(r) \text{ m} = b - r = 5 \text{ m} - r, \quad \Theta_2^3(r) \text{ m} = a + H_2 - r = 3,75 \text{ m} - r. \quad (3.96)$$

Die Wahl des Materials, Isotropie vorausgesetzt, hat keinen Einfluss auf die zu ermittelnden Spannungszustände. Die Querdehnzahl wurde  $\nu = 0$  gewählt. Der Bogen ist statisch bestimmt an einem Knotenpunkt gelagert. Der Funktionsverlauf  $\mathbf{F}_a = \sigma_\varphi \mathbf{e}_y$ , vgl. (2.154), in Schalendickenrichtung der äußeren Belastung wird im Folgenden auf die zwei Schichten verteilt, vgl. (3.34), und entspricht dem Moment  $M = 0,1 \text{ kNm}$ , das an den Bogenenden wirkt. Innerhalb der Schichten wird jeweils ein Ansatz mit 3 Direktoren gewählt ( $d_1 = d_2 = 3$  in (3.13)), um die analytisch ermittelten Spannungsverläufe insbesondere in die Schalendickenrichtung so gut wie möglich erhalten zu

können. Die Spaltenvektoren der Direktorkräfte (3.37) werden für die Schichten  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$  nach der Berechnungsvorschrift (3.38) berechnet, wobei die darin vorkommende Determinante  $\mu$  des Schalensors zur Integration über das Volumen gehört und für die hier vorliegende Kanten- bzw. Linienlast ohne Einfluss bzw. Eins ist. Der Spaltenvektor ergibt sich mit den o. g. Abmaßen für die Schicht  $\mathcal{B}_1$  zu

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_{a1}^* &= \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{F}_{a1} \\ {}_1\mathbf{F}_{a1} \\ {}_2\mathbf{F}_{a1} \\ {}_3\mathbf{F}_{a1} \end{bmatrix} = \int_{r=a+H_2}^b \underline{\Omega}_1(\Theta_1^3(r)) \otimes \mathbf{F}_a(r) dr \\ &= \int_{r=a+H_2}^b \begin{bmatrix} 1 \\ \Theta_1^3(r) m \\ (\Theta_1^3(r) m)^2 \\ (\Theta_1^3(r) m)^3 \end{bmatrix} \sigma_\varphi(r) dr \otimes \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0,59223 \text{ kN/m} \\ 0,28185 \text{ kN} \\ 0,19622 \text{ kNm} \\ 0,16147 \text{ kNm}^2 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{e}_y \quad (3.97) \end{aligned}$$

und für die Schicht  $\mathcal{B}_2$  zu

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_{a2}^* &= \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{F}_{a2} \\ {}_1\mathbf{F}_{a2} \\ {}_2\mathbf{F}_{a2} \\ {}_3\mathbf{F}_{a2} \end{bmatrix} = \int_{r=a}^{a+H_2} \underline{\Omega}_2(\Theta_2^3(r)) \otimes \mathbf{F}_a(r) dr \\ &= \int_{r=a}^{a+H_2} \begin{bmatrix} 1 \\ \Theta_2^3(r) m \\ (\Theta_2^3(r) m)^2 \\ (\Theta_2^3(r) m)^3 \end{bmatrix} \sigma_\varphi(r) dr \otimes \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} -0,59222 \text{ kN/m} \\ -0,54157 \text{ kN} \\ -0,5288 \text{ kNm} \\ -0,54185 \text{ kNm}^2 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{e}_y. \quad (3.98) \end{aligned}$$

Die so errechneten Linienlasten entlang der Schalendicke  $a$  wirken an den Direktoren der jeweiligen Schicht an beiden Enden des Halbbogens über die gesamte Scheibendicke  $h$ . Die Größtwerte der Spannungskomponente  $\sigma_\varphi$  werden an den Laibungen allgemein und für den Fall  $b = 2a$  in [GIRKMANN 1963] wie folgt angegeben:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi|_{r=a} &= -\frac{4M}{h \left( (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2 \right)} \left( b^2 - a^2 - 2b^2 \ln \frac{b}{a} \right) \\ &= 7,76 \frac{M}{a^2h} = 1,24 \text{ kN/m}^2 \quad (3.99) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi|_{r=b} &= -\frac{4M}{h \left( (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2 \right)} \left( b^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{b}{a} \right) \\ &= -4,91 \frac{M}{a^2h} = -0,780 \text{ kN/m}^2. \quad (3.100) \end{aligned}$$

Der Größtwert der Spannungskomponente  $\sigma_r$  wird für den Fall  $b = 2a$  wie folgt angegeben:

$$\sigma_{r,\max} = 1,05 \frac{M}{a^2h} = 0,168 \text{ kN/m}^2. \quad (3.101)$$

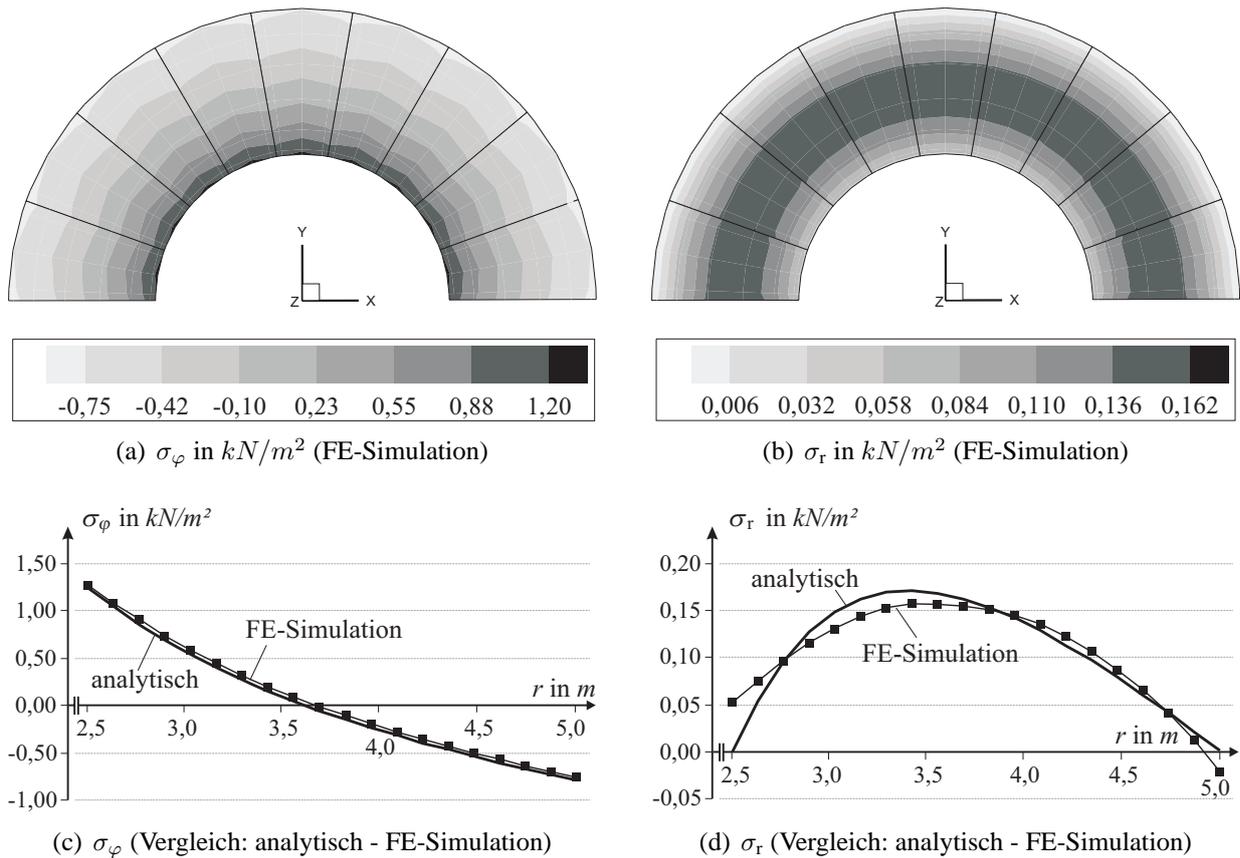


Abbildung 3.16: Reine Biegung des Kreisbogenträgers - Spannungen

In Abb. 3.16 ist der Verlauf der Spannungskomponenten  $\sigma_r$  und  $\sigma_\varphi$ , als Ergebnis einer geometrisch nichtlinearen Finite-Element-Berechnung abgebildet, die sich von der geometrisch linearen nur unwesentlich unterscheidet. In Abb. 3.16(a) ist die Spannung  $\sigma_\varphi = \sigma_m^{11}$ , vgl. (2.107), in Umlaufrichtung und in Abb. 3.16(b) die Spannung  $\sigma_r = \sigma_m^{33}$ , vgl. (2.107), in Radialrichtung dargestellt. Ein Vergleich dieser errechneten Spannungen mit den analytisch nach (3.94) und (3.95) ermittelten wird in Abb. 3.16(c) und Abb. 3.16(d) vorgenommen, wobei die durch die FE-Simulation erhaltenen Spannungsverläufe jeweils durch die Linien mit Quadratsymbolen repräsentiert werden. In den Diagrammen wird der Verlauf der Spannungen entlang der Bogendickenrichtung, also entlang des Radius  $r$  dargestellt. Beide Spannungskomponenten werden bei Verwendung von 9 zweischichtigen Schalenelementen mit vertretbarer Übereinstimmung zur analytischen Lösung erhalten. Bei Vernetzung mit 9 einschichtigen Schalenelementen ergeben sich bereits ähnliche Übereinstimmungen.

## 4 Erweiterungen zur Mehrschichten-Schalentheorie

### 4.1 Modellbildung

Die im Zusammenhang mit Laminattheorien am häufigsten zum Einsatz kommenden Versagenskriterien sind die bereits in Abschnitt 1.3.5 aufgeführten Kriterien, das Kriterium der maximalen Spannungen, das TSAI-HILL-Kriterium, das TSAI-WU-Kriterium, das Kriterium von HASHIN und das Kriterium von PUCK. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein einfaches Versagenskriterium ausschließlich für den Verbund zwischen zwei Schichten des Mehrschichtenmodells eingeführt, das in Anlehnung an das Kriterium von HASHIN, vgl. [HASHIN 1980], formuliert wird. Danach

liegt Delamination vor, wenn allein die interlaminaren Spannungen einen Grenzzustand erreicht haben. Es ist nicht Bestandteil dieser Arbeit, die nachfolgend beschriebene Versagensfläche experimentell abzusichern. Das auf vollständigen dreidimensionalen Spannungszuständen beruhende Versagenkriterium, das lastschrittweise an den Schichtgrenzen ausgewertet wird, entscheidet über den Verbundzustand an der Stelle der den Integrationspunkten zugeordneten Punkten in der Schichtgrenze und damit auch über den davon abhängigen Verbundzustand an den Knoten der finiten Elemente. Die Werte der Parameter des Versagenkriteriums werden z. T. auf der Grundlage von Simulationen von Verbundversuchen (Laschenabzugsversuchen) mit einem Zweischichtenmodell bestimmt, wie in Abschnitt 5.2 gezeigt wird, und z. T. direkt in Versuchen ermittelt.

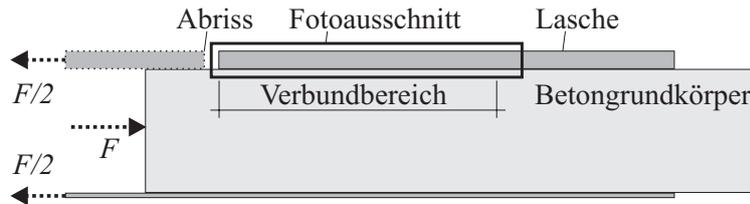


Abbildung 4.1: Seitenansicht des Laschenabzugsversuches (Prinzipiskizze)

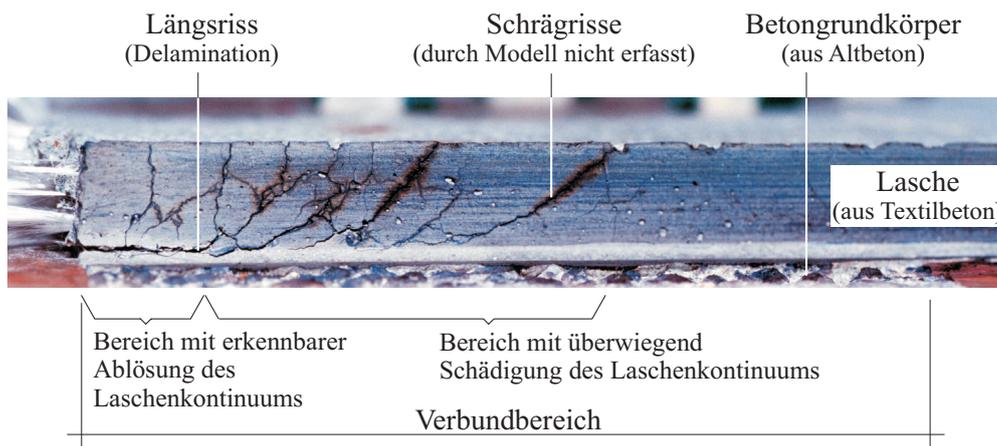


Abbildung 4.2: Seitenansicht der Textilbetonverstärkungsschicht (Lasche) mit Delamination und Rissbild

Überschreitet der Spannungszustand in einem Punkt in der Oberfläche einer Schicht die Grenze der zulässigen Spannungszustände, werden am zugehörigen Elementknoten, in dessen Gebiet der Punkt liegt, Freiheitsgrade an der entsprechenden Schicht eingeführt, die Relativverschiebungen zwischen den Schichten ermöglichen. Darüber hinaus werden ab diesem Zeitpunkt in der Oberfläche der entsprechenden Schicht in allen angrenzenden Gebieten, die zu diesem Elementknoten gehören, auch die der ggf. vorhandenen Nachbarelemente, diese zusätzlichen Freiheitsgrade bei der Darstellung des Verschiebungszustandes berücksichtigt. Das heißt, in diesen Gebieten hat Delamination stattgefunden. Genauer wird dieser Vorgang in Abschnitt 4.2.3 beschrieben. Durch die in Abb. 3.3 gezeigten großflächigen Ablösungserscheinungen von Verstärkungsschichten in Versuchen an einem textilbewehrten Stahlbeton-Plattenbalken und an einer textilbewehrten Holz-Leiste wurde die Formulierung eines Mehrschichten-Schalensmodells motiviert. Durch die Entwicklung spezieller Mehrschichten-Schalentheorien mit integrierten Kontaktbedingungen zur Beschreibung des Fortschreitens der Delamination wird die Möglichkeit geschaffen, ein inelastisches Verformungsverhalten in einer Delaminationsfläche delaminierender Schichten abzubilden. Die Abb. 3.3

zeigt, dass es Spannungszustände in verstärkten Bauteilen gibt, durch die sich, bevor andere Schädigungsarten in größerem Umfang auftreten, größere geschlossene Bereiche der Verstärkung ablösen können. Es gibt aber auch den Fall, dass vor der Delamination in größerem Umfang Schädigungen innerhalb der verbundenen Schichten auftreten, wie es in einem sich ablösenden Bereich einer Verstärkung aus textilbewehrtem Beton in Abb. 4.2 dargestellt ist. Die Abbildung zeigt ein Rissbild im Verbundbereich als Ergebnis eines Verbundversuchs des Teilprojektes C1 des Sonderforschungsbereiches 528 „Textile Bewehrungen“, bei dem die textilbewehrte Feinbetonschicht (als Lasche bezeichnet) vom Grundkörper (nach links) abgezogen wurde, vgl. Abb. 5.6 in Abschnitt 5.2 und die Prinzipskizze Abb. 4.1. Über den gesamten sich ablösenden Bereich sind Schrägrisse zu erkennen. Das inelastische Verhalten der Lasche, also die Herausbildung zahlreicher Schrägrisse während des Abzugsvorgangs, wird durch das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell nicht berücksichtigt, da für das Kontinuum der Schalenschichten ein linear elastisches Material verwendet wird. Es wird nur die Entwicklung des Längsrisse in der Verbindungsfläche zwischen den Schichten, die hier wie die großflächigen Ablösungen in Abb. 3.3 ebenfalls als Delamination bezeichnet wird, bei weiterer Laststeigerung abgebildet. Nach Auftreten dieses Risses wird die dann noch vorhandene Tragfähigkeit im delaminierten Bereich der Fläche zwischen den Schichten durch ein nichtlineares Reibgesetz in einer Gleitfläche erfasst.

## 4.2 Unstetige Mehrschichten-Schalenskinematik

Innerhalb der im Rahmen dieser Arbeit eingeführten allgemeinen Mehrschichten-Schalenskinematiken mit lösbarem Verbund zwischen den Schichten im verformten Zustand existieren im Allgemeinen Bereiche innerhalb des Mehrschichten-Schalenskörpers, in denen beliebige Schichten  $\mathcal{B}_{L-1}$  und  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  miteinander verbunden sind, und Bereiche, in denen sie nicht verbunden sind.

### 4.2.1 Mehrschichten-Schalenskinematik in Bereichen ohne Schichtenverbund

Sind die Schichten  $\mathcal{B}_{L-1}$  und  $\mathcal{B}_L$  in der verformten Konfiguration in einem speziellen Punkt  ${}_{0}p_L (\Theta_L^1, \Theta_L^2)$  in  $\mathcal{S}_L$  für  $L > 1$  nicht wie im Ausgangszustand, vgl. (3.9), oder beim Sonderfall mit vollem Schichtenverbund im verformten Zustand, vgl. (3.56), miteinander verbunden, kann in diesem Punkt gelten:

$${}_{0}\mathbf{u}_L \neq \mathbf{u}_{L-1} \Big|_{\Theta_{L-1}^3 = H_{L-1}}, \quad (4.1)$$

vgl. Abb. 3.6. Das heißt, es gibt in diesem Punkt keine  $C_0$ -Stetigkeit des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$  des mehrschichtigen Schalenskörpers über die Schichtgrenze der Schichten  $\mathcal{B}_{L-1}$  und  $\mathcal{B}_L$  hinweg. Das hat zur Folge, dass anders als in Gleichung (3.56), in der  ${}_{0}\mathbf{u}_L (\Theta_L^1, \Theta_L^2)$  ein Verschiebungsvektor war, der eliminiert werden und durch andere Verschiebungsvektoren dargestellt werden konnte, vgl. (3.57), für das Verschiebungsfeld (3.21) für jeden Punkt  ${}_{p_L} (\Theta_L^1, \Theta_L^2)$  in  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$ , also für die Verschiebung der Punkte innerhalb der Schicht mit den selben Koordinaten  $\Theta_L^1, \Theta_L^2$  wie die des Punktes  ${}_{0}p_L$ , allgemein lediglich geschrieben werden kann:

$$\mathbf{u}_L (\Theta_L^1, \Theta_L^2, \Theta_L^3) = {}_{0}\mathbf{u}_L + \sum_{l=1}^{d_L} (\Theta_L^3)^l {}_l\mathbf{u}_L. \quad (4.2)$$

Im Unterschied zur Kinematik (3.58) kann bei einem Punkt  ${}_{0}p_L$  mit  $L > 1$ , in dem die Schicht  $\mathcal{B}_L$  nicht mit der Schicht  $\mathcal{B}_{L-1}$  verbunden ist, die Kinematik (4.2) innerhalb der Schicht nur ausgehend vom Verschiebungsfeld  ${}_{0}\mathbf{u}_L$  der Referenzfläche der selben Schicht entwickelt werden.

### 4.2.2 Mehrschichten-Schalenkinematik in Bereichen mit Schichtenverbund

Gilt innerhalb dieser allgemeinen Mehrschichten-Schalenkinematik mit lösbarem Verbund für einen speziellen Punkt  ${}_{0}p_L(\Theta_L^1, \Theta_L^2)$  in  $\mathcal{S}_L$  Bedingung (3.56), also dass die Schicht  $\mathcal{B}_L$  mit der Schicht  $\mathcal{B}_{L-1}$  in der verformten Konfiguration wie im Ausgangszustand miteinander verbunden ist, lässt sich zunächst für die Verschiebung des Punktes der Schichtenreferenzfläche schreiben:

$${}_{0}\mathbf{u}_L(\Theta_L^1, \Theta_L^2) = {}_{0}\mathbf{u}_{L-1} + \sum_{l=1}^{d_{L-1}} (H_{L-1})^l {}_l\mathbf{u}_{L-1}. \quad (4.3)$$

Für das Verschiebungsfeld (3.21) für jeden Punkt  ${}_{p}L(\Theta_L^1, \Theta_L^2)$  in  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$ , also für die Verschiebung der Punkte innerhalb der Schicht mit den selben Koordinaten  $\Theta_L^1, \Theta_L^2$  wie die des Punktes  ${}_{0}p_L$ , lässt sich dann schreiben:

$$\mathbf{u}_L(\Theta_L^1, \Theta_L^2, \Theta_L^3) = {}_{0}\mathbf{u}_{L-1} + \sum_{l=1}^{d_{L-1}} (H_{L-1})^l {}_l\mathbf{u}_{L-1} + \sum_{l=1}^{d_L} (\Theta_L^3)^l {}_l\mathbf{u}_L. \quad (4.4)$$

In (4.3) und (4.4) tritt die Verschiebung der Referenzfläche  ${}_{0}\mathbf{u}_{L-1}$  der Schicht  $\mathcal{B}_{L-1}$  explizit auf, da die Referenzflächenverschiebung  ${}_{0}\mathbf{u}_L$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  sich auf diese zurückführen lässt, wenn diese Schichten untereinander im entsprechenden Punkt verbunden sind.

### 4.2.3 Modellanpassung des finiten Mehrschichten-Elementes

#### Knotenpunkt-Verschiebungsvektoren der Schicht.

Innerhalb einer Schicht  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  gibt es Bereiche, in denen die Schicht mit der Schicht  $\mathcal{B}_{L-1}$  verbunden ist, und Bereiche, in denen das nicht der Fall ist. Diese Bereiche werden vereinfachend repräsentiert durch die Integrationspunkte in der Schichtenreferenzfläche  $\mathcal{S}_L$ . Das finite Mehrschichtenelement besitzt 9 Knotenpunkte  ${}^eP = {}^eP(\Theta_1^1, \Theta_1^2, \Theta_1^3)|_{\Theta_1^3=0}$  mit  $e = 1, 2, \dots, 9$ , die aus der in Abschnitt 2.9 vorgenommenen Diskretisierung innerhalb der Einschichtentheorie aus (2.208) übernommen werden. In Abschnitt 2.9 wird zudem von  $n_i = 3$  Stützstellen je Integrationsrichtung ausgegangen, d. h. übertragen auf eine Schicht  $\mathcal{B}_L$  des finiten Mehrschichtenelementes, wird von 9 Integrationspunkten  ${}_{0}P_L(i_x, i_y, \Theta_L^3)|_{\Theta_L^3=0}$  in der Schichtenreferenzfläche  $\mathcal{S}_L$  ausgegangen. Es wird nun folgendes vereinbart:

1. Am Integrationspunkt  ${}_{0}P_L(i_x, i_y, \Theta_L^3)|_{\Theta_L^3=0}$  gilt entweder die Kinematik (4.4), wenn  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  in diesem Punkt mit  $\mathcal{B}_{L-1}$  verbunden ist, andernfalls gilt Kinematik (4.2). Die Kinematik, die in diesem Integrationspunkt gilt, gilt auch im gesamten zugehörigen Bereich  ${}^e\mathcal{S}_L$ , der ein Teilbereich von  $\mathcal{S}_L$  ist, vgl. Abb. 4.3. Der Verlauf der Ränder der Bereiche  ${}^e\mathcal{S}_L$  um einen Integrationspunkt ist willkürlich. Die Ränder wurden so gewählt, dass sie im Elementinneren die Mitten der Linien zwischen zwei Integrationspunkten und auf dem Elementrand die Mitten der Linien zwischen zwei Elementknoten verbinden bzw. auf dem Elementrand verlaufen. Eine Zuordnung der Indizierungen  $x, y$  der Integrationspunkt-Koordinaten, vgl. (2.274), zum Bereichsindex  $e$  erfolgt folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (x = 1, y = 1) &\Leftrightarrow (e = 3) ; & (x = 1, y = 2) &\Leftrightarrow (e = 6) ; & (x = 1, y = 3) &\Leftrightarrow (e = 2) ; \\ (x = 2, y = 1) &\Leftrightarrow (e = 7) ; & (x = 2, y = 2) &\Leftrightarrow (e = 9) ; & (x = 2, y = 3) &\Leftrightarrow (e = 5) ; \\ (x = 3, y = 1) &\Leftrightarrow (e = 4) ; & (x = 3, y = 2) &\Leftrightarrow (e = 8) ; & (x = 3, y = 3) &\Leftrightarrow (e = 1) . \end{aligned}$$

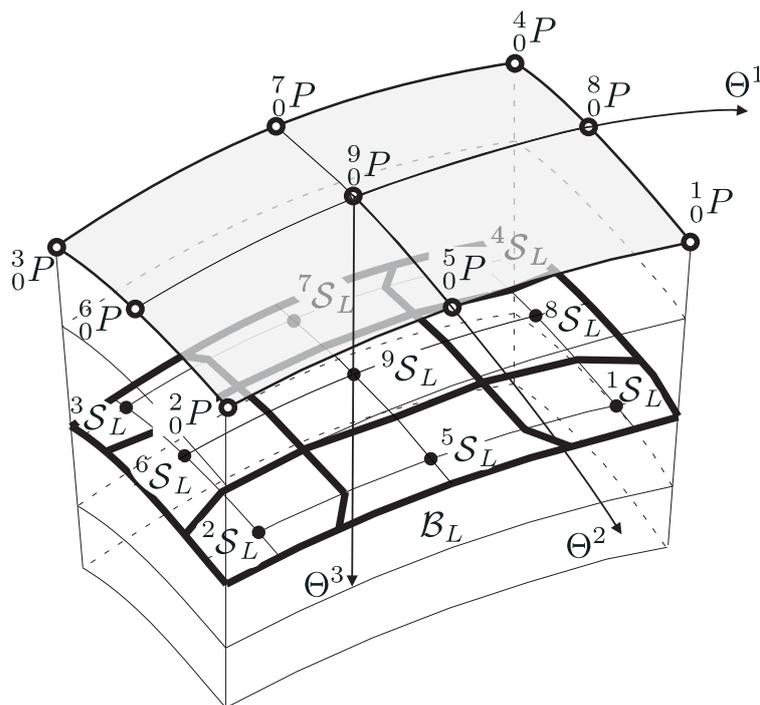


Abbildung 4.3: Bereiche  ${}^e S_L$  einer Schichtenreferenzfläche des finiten Elementes

2. Die am o. g. Integrationspunkt gültige Kinematik, die auch für den Bereich  ${}^e S_L$  gilt, gilt auch am Element-Knotenpunkt  ${}^e_0 P$  für die Schicht  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$ . Im Falle des Verbundes kommt demnach entsprechend (4.4) der Spaltenvektor  ${}^e \underline{\mathbf{u}}_L^r$  nach (3.59) und andernfalls entsprechend (4.2) der Spaltenvektor  ${}^e \underline{\mathbf{u}}_L^v$  nach (3.40) zur Anwendung, die jeweils die Knotenpunktverschiebungen des Element-Knotenpunktes  $f = e$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  zusammenfassen. (Der Index  $f = e$  an  ${}^e \underline{\mathbf{u}}_L^v$  ist kursiv gedruckt und steht für die Knotennummer  $e$ .)
3. Die am Element-Knotenpunkt  ${}^e_0 P$  für die Schicht  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  geltende Kinematik gilt umgekehrt auch für den Bereich  ${}^e S_L$ , zu dem auch der Integrationspunkt  ${}_0 P_L(i_x, i_y, \Theta_L^3)|_{\Theta_L^3=0}$  gehört. Dieser dritte Punkt der Vereinbarung stellt die Umkehrung der Aussagepunkte eins und zwei dar und bezieht sich auf die Klärung der Zuordnungsproblematik, wenn zu einem Element-Knotenpunkt  ${}^e_0 P$  mehrere Bereiche  ${}^e S_L$  verschiedener finiter Mehrschichtenelemente gehören, was außer bei  $e = 9$  im Allgemeinen vorkommt. Das heißt, wird in einem Integrationspunkt einer Schicht eines finiten Elementes der Verbund gelöst, wird er mit der Vereinbarung 1. und 2. auch am zugehörigen Element-Knotenpunkt gelöst und mit der Vereinbarung 3. als zwangsläufige Folge auch in den Bereichen benachbarter finiter Elemente, zu denen dieser Element-Knotenpunkt gehört.

Die so entstehenden Kinematiken, die abhängig von der Anzahl der Direktoren der jeweiligen Schicht sind, können analog der in Abb. 2.4 dargestellten verschiedenen Einschichtenkinematiken und der in Abb. 3.9 dargestellten Zweischichtenkinematiken wiederum exemplarisch wie in Abb. 4.4 für zwei Schichten dargestellt werden, wobei in beiden Schichten jeweils die gleiche Anzahl von Direktoren verwendet werden.

**Verschiebungsvektoren des Integrationspunktes und des mehrschichtigen finiten Elementes.** Die reduzierten Spaltenvektoren  $\underline{\mathbf{u}}^f$  am Integrationspunkt (3.49) des mehrschichtigen finiten Ele-

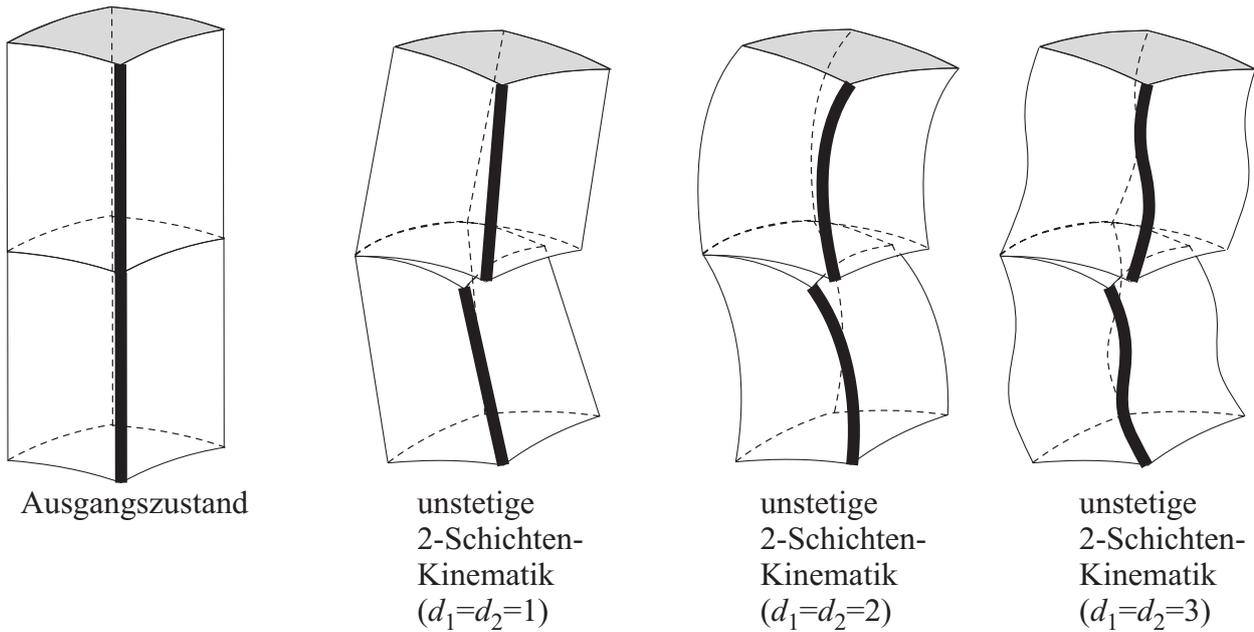


Abbildung 4.4: Unstetige Mehrschichten-Multidirektor-Kinematiken – mögliche Verformung des Schalenkörpers bei unterschiedlichen Kinematiken (unterschiedliche Anzahl von Direktoren)

menten und  ${}^e\mathbf{u}^r$  des gesamten mehrschichtigen finiten Elementes der allgemeinen Mehrschichten-Schalenginematik mit lösbarem Verbund zwischen den Schichten im verformten Zustand werden jeweils durch Zusammenfassen einzelner Schichtenvektoren  ${}^e\mathbf{u}_L^r$  aller Schichten  $\mathcal{B}_L$  der Reihe nach zum neuen Spaltenvektor analog Abschnitt 3.3.2 gebildet. Die einzelnen Schichtenvektoren können dabei abwechselnd (3.59) oder (3.40) sein. Die ggf. zur Anwendung kommenden vollständigen Spaltenvektoren der Verschiebungsfreiwerte  $\mathbf{u}^v$  nach (3.60) und  ${}^e\mathbf{u}^v$  nach (3.52) kommen für den Sonderfall der allgemeinen Mehrschichten-Schalenginematik zur Anwendung, wenn für  $\mathbf{u}^v$  alle Schichten entlang der  $\Theta_1^3$ -Linie in den Integrationspunkten der Schalenreferenzfläche und für  ${}^e\mathbf{u}^v$  alle Schichten des Elementes vollständig voneinander gelöst sind.

#### 4.2.4 Verbundmatrix der allgemeinen Mehrschichten-Schalenginematik

##### Verbundmatrix des mehrschichtigen finiten Elementes.

Analog (3.63) wird auf der Grundlage der vorstehend beschriebenen allgemeinen Mehrschichten-Schalenginematik eine quadratische Verbundmatrix  ${}^e\mathbf{V}$  des finiten Elementes in jedem Punkt  ${}_0P_1$  der Schalenreferenzfläche definiert, die den reduzierten Vektor der Verschiebungsfreiwerte  ${}^e\mathbf{u}^r$  des finiten Elementes mit dem vollständigen Vektor der Verschiebungsfreiwerte  ${}^e\mathbf{u}^v$  des finiten Elementes in diesem Punkt verknüpft:

$${}^e\mathbf{u}^v = {}^e\mathbf{V} {}^e\mathbf{u}^r. \quad (4.5)$$

Man erhält in matrizieller Schreibweise mit den kinematischen Bedingungen (4.4) für die Schicht  $\mathcal{B}_L$ , die mit  $\mathcal{B}_{L-1}$  im dargestellten Element-Knotenpunkt verbunden ist, und (4.2) für die Schicht

$\mathcal{B}_K$ , die mit  $\mathcal{B}_{K-1}$  im dargestellten Element-Knotenpunkt nicht verbunden ist:

$$\begin{bmatrix} {}^1_0 \mathbf{u}_1 \\ {}^1_1 \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ {}^1_{d_{K-1}} \mathbf{u}_{K-1} \\ {}^1_0 \mathbf{u}_K \\ {}^1_1 \mathbf{u}_K \\ \dots \\ {}^1_0 \mathbf{u}_L \\ \dots \\ {}^9_{d_{n_S}} \mathbf{u}_{n_S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & {}^1 H_K & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \otimes \underline{\mathbf{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1_0 \mathbf{u}_1 \\ {}^1_1 \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ {}^1_{d_{K-1}} \mathbf{u}_{K-1} \\ {}^1_0 \mathbf{u}_K \\ {}^1_1 \mathbf{u}_K \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ {}^9_{d_{n_S}} \mathbf{u}_{n_S} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

wenn zudem alle zwischen den Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_K$  befindlichen Schichten im dargestellten Element-Knotenpunkt miteinander verbunden sind. Durch  ${}^e H_K$  wird die Dicke der Schicht  $K$  am Knoten  $e$  repräsentiert, wobei in (4.6) nur Matrixelemente dargestellt sind, die Dicken von Schichten am Knoten  $e = 1$  enthalten.

### Verbundmatrix am Integrationspunkt des mehrschichtigen finiten Elementes.

Die Beziehung (4.5) kann analog am Integrationspunkt des mehrschichtigen finiten Elementes angegeben werden:

$$\underline{\mathbf{u}}^v = \underline{\mathbf{V}} (\Theta_1^1, \Theta_1^2) \underline{\mathbf{u}}^r, \quad (4.7)$$

womit die quadratische Verbundmatrix  $\underline{\mathbf{V}} (\Theta_1^1, \Theta_1^2)$  für alle Punkte  ${}_0 P_1$ , die ggf. die Integrationspunkte in der Schalenreferenzfläche sind, des speziellen finiten Mehrschichtenelementes identifiziert ist. Gekoppelt werden darin in jedem Fall nur alle 3 Richtungen eines Verschiebungsvektors gemeinsam durch die gleiche Bedingung.

- Es lässt sich beispielhaft für ein dreischichtiges Schalenelement mit einem Direktor je Schicht, wenn in einem Punkt der Referenzfläche die zweite sich von der ersten Schicht gelöst hat, der vollständige Vektor der Verschiebungsfreiwerte in diesem Punkt folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix} {}_0 \mathbf{u}_1 \\ {}_1 \mathbf{u}_1 \\ {}_0 \mathbf{u}_2 \\ {}_1 \mathbf{u}_2 \\ {}_0 \mathbf{u}_3 \\ {}_1 \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \underline{\mathbf{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0 \mathbf{u}_1 \\ {}_1 \mathbf{u}_1 \\ {}_0 \mathbf{u}_2 \\ {}_1 \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{0} \\ {}_1 \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

### 4.2.5 Elementmatrizen und -spaltenvektoren der allgemeinen Mehrschichten-Schalenkinematik

Werden die reduzierte tangentielle Steifigkeitsmatrix

$${}^e \underline{\mathbf{K}}_T^r = ({}^e \underline{\mathbf{V}})^T {}^e \underline{\mathbf{K}}_T^v {}^e \underline{\mathbf{V}} \quad (4.9)$$

und der reduzierte Spaltenvektor der inneren Knotenkräfte

$${}^e \underline{\mathbf{f}}^r = ({}^e \underline{\mathbf{V}})^T {}^e \underline{\mathbf{f}}^v \quad (4.10)$$

und der Spaltenvektor der äußeren Knotenkräfte

$${}^e \underline{\mathbf{F}}_a^r = ({}^e \underline{\mathbf{V}})^T {}^e \underline{\mathbf{F}}_a^v \quad (4.11)$$

der allgemeinen Mehrschichten-Schalenkinematik in (3.51) eingesetzt, wird das zu lösende Gleichungssystem (3.68) zu:

$${}^e \underline{\mathbf{f}}^r + {}^e \underline{\mathbf{K}}_T^r {}^e \underline{\mathbf{u}}^r - {}^e \underline{\mathbf{F}}_a^r = 0, \quad (4.12)$$

was vollständig identisch mit (3.72) ist, nur dass es sich hier bei den reduzierten Matrizen und Vektoren um die der allgemeinen Mehrschichten-Schalenkinematik handelt und durch die Verbundmatrix  ${}^e \underline{\mathbf{V}}$ , vgl. (4.5), nun auch nur teilweise oder vollständig kein Verbund zwischen allen Schichten des finiten Elementes repräsentiert wird. Die Steifigkeitsmatrix (4.9) und die Spaltenvektoren (4.10) und (4.11) werden für die Ausgangskonfiguration stets durch die Verbundmatrix  ${}^e \underline{\mathbf{V}}^0$  des vollständigen Verbundes, vgl. (3.63), berechnet, was einen Sonderfall der allgemeinen Verbundmatrix  ${}^e \underline{\mathbf{V}}$  darstellt. Während des Lösungsverfahrens des Gleichungssystems (4.12) mit dem Verfahren von NEWTON-RAPHSON verändert sich die Belegung der Verbundmatrix  ${}^e \underline{\mathbf{V}}$  mit zunehmender Delamination in den Zwischenkonfigurationen von einem Lastschritt zum nächsten, ausgehend von der Belegung für vollständigen Verbund hin zur Einheitsmatrix für vollständig aufgehobenen Verbund, d. h. ggf. für vollständige Delamination:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ausgangs-, Zwischen- oder Endkonfig.,} & \text{Zwischen- oder Endkonfig.,} & \text{Zwischen- oder Endkonfig.,} \\ \text{vollständiger Verbund} & \text{teilweiser Verbund} & \text{vollständige Delamination} \\ {}^e \underline{\mathbf{V}} = {}^e \underline{\mathbf{V}}^0 & \longrightarrow & {}^e \underline{\mathbf{V}} & \longrightarrow & {}^e \underline{\mathbf{V}} = {}^e \underline{\mathbf{1}} \end{array} \quad (4.13)$$

Diese Veränderung geschieht nur in diese Richtung – nicht umgekehrt.

### 4.3 Delaminationskriterium

#### Versagensfunktion.

Im Abschnitt 4.2.3 wurde erläutert, dass in allen an einen Element-Knotenpunkt angrenzenden Bereichen  ${}^e \mathcal{S}_L$ , die Teilbereiche von  $\mathcal{S}_L$  sind, vgl. Abb. 4.3, auch verschiedener Elemente für die gleiche Schicht  $\mathcal{B}_L$  die jeweils gleiche Kinematik gilt, entweder die Kinematik (4.4), wenn  $\mathcal{B}_L$  für  $L > 1$  in diesem Punkt mit  $\mathcal{B}_{L-1}$  verbunden ist, andernfalls Kinematik (4.2). Wenn die Schichten in einem Bereich nicht mehr verbunden sind, hat in diesem Bereich Delamination stattgefunden, und das Mehrschichten-Schalenmodell ist in der Lage, sich den veränderten Bewegungsmöglichkeiten der delaminierten Schicht anzupassen. Für die delaminierte Schicht  $\mathcal{B}_L$  kommt, wie im Abschnitt 4.2.3 beschrieben, entsprechend (4.2) der Spaltenvektor  ${}^e \underline{\mathbf{u}}_L^v$  nach (3.40) zur Anwendung, d. h. das innerhalb der Finite-Elemente-Methode zu lösende Gleichungssystem bekommt zusätzliche Freiheitsgrade.

Die Entscheidung darüber, wann beginnend im zu  ${}^e \mathcal{S}_L$  gehörenden Integrationspunkt  ${}^0 P_L(i_x, i_y, \Theta_L^3)|_{\Theta_L^3=0}$  die Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  delaminieren, wird auf der Grundlage eines Delaminationskriteriums, auch Verbundbedingung genannt, getroffen. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Spannungskriterium verwendet. Die kinematischen Beziehungen (4.4) gewährleisten das Zusammenhalten der Schichten in der Finite-Element-Simulation solange kritische Spannungen, die Versagen in Form von Delamination zur Folge haben, am Integrationspunkt  ${}^0 P_L(i_x, i_y, \Theta_L^3)|_{\Theta_L^3=0}$  in der Grenzfläche zwischen den Schichten noch nicht erreicht wurden.

Für den Verbund von Schichten eines Laminates kritische Spannungen sind sogenannte interlaminare Spannungen, vgl. [SCHULTZ 1996]. Das sind Spannungen, durch die eine Kraftwirkung bezüglich eines differentiellen Flächenausschnitts der Verbundfläche der Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  ausgeübt wird. Dieser Kraftvektor kann als der in Abschnitt 3.2.4 aus den CAUCHY-Spannungen  $\sigma_{SL}$  der Oberfläche bezüglich des Flächenelementes  $da_{SL}$  hervorgegangene Spannungsvektor (3.33) der Oberfläche, der hier wiederholt durch

$$\sigma_{KL} = \sigma_{\bar{m}L}^{k3} \bar{\mathbf{m}}_{kL} \quad (4.14)$$

angegeben wird, identifiziert werden. Dessen Maßzahlen werden mit maximal zulässigen Werten, die eine sogenannte Versagensfläche im Spannungsraum im Koordinatensystem  $\sigma_{\bar{m}L}^{k3}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) darstellen, verglichen.

Das dem Versagenskriterium für diese Mehrschichten-Schalenformulierung zu Grunde gelegte Modell basiert auf Formulierungen, die ähnlich u. a. in [HASHIN 1980] und [BREWER, LAGACE 1988] zu finden sind, und ist an die Ansprüche bei der Simulation von flächenhaftem Verbund von Textilbeton angepasst. In o. g. Koordinatensystem wird zunächst die Versagensfunktion

$$V = \sqrt{(\sigma_{\bar{m}L}^{13})^2 + (\sigma_{\bar{m}L}^{23})^2} - \tau_{\max} \left( 1 - \frac{\sigma_{\bar{m}L}^{33}}{\sigma_{\max}^{33}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{mit } \sigma_{\bar{m}L}^{33} \leq \sigma_{\max}^{33} \quad (4.15)$$

eingeführt, die mit

$$V \leq 0 \quad (4.16)$$

alle zulässigen bzw. möglichen Spannungszustände definiert. Die Versagensfunktion  $V$  ist die charakteristische Größe als Entscheidungskriterium zwischen Verbund und Ablösung (Delamination). In (4.15) ist  $\sigma_{\max}^{33}$  die Zugspannung, die durch den intakten Verbund senkrecht zur potentiellen Delaminationsfläche, also senkrecht zur Schichtenreferenzfläche, übertragen werden kann. Die Versagensfunktion wurde so formuliert, dass die interlaminaren Spannungen, die durch die Komponenten des Spannungsvektors (4.14) der Oberfläche repräsentiert werden, zusammen mit den ihnen gegenüberstehenden Grenzwerten  $\sigma_{\max}^{33}$  und  $\tau_{\max}$  in die Bewertung einfließen. Gegenüber der in der Literatur häufig gewählten quadratischen Funktion für die Form einer Versagensfläche wird hier durch die Einführung des Parameters  $p$  die Form frei wählbar gestaltet.

#### Parameter.

Die Versagensfunktion wurde durch die Grenzwerte  $\tau_{\max}$  als maximalen Betrag der resultierenden Schubspannungen bei einem Spannungszustand, bei dem senkrecht zur Versagensfläche keine Spannung auftritt, und  $\sigma_{\max}^{33}$  als maximalen Betrag der Zugspannungen senkrecht zur Versagensfläche bei einem Spannungszustand, bei dem keine Schubspannung auftritt, definiert. Diese Spannungswerte werden durch entsprechende Parameterstudien bei Auswertung der im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 528 „Textile Bewehrungen zur bautechnischen Verstärkung und Instandsetzung“ durchgeführten Versuche für die in Abschnitt 2.6 beschriebenen Materialien gefunden, vgl. [WEBER 2005].

1. Die maximale Zugspannung senkrecht zur Gelegefläche liegt bei diesen Materialien, und zwar bei den meisten im Rahmen des SFB 528 untersuchten Textilbetonen in Abhängigkeit des sogenannten Matrixflächenanteils in der Textilgelegefläche, etwa bei

$$\sigma_{\max}^{33} \approx 2,0 \text{ N/mm}^2 \quad (4.17)$$

und kann als Messergebnis aus entsprechenden Versuchen für einzelne Gelegearten, vgl. [CURBACH, ORTLEPP 2003], direkt übernommen werden. Eine umfangreiche Darstellung der Einflussgrößen auf die Eigenschaften von Textilbeton und den damit verbundenen Streuungen der Versuchsergebnisse gibt [JESSE 2004].

- Die maximale resultierende Schubspannung parallel zur Gelegefläche liegt bei einzelnen im Rahmen des SFB 528 untersuchten Textilbetonen etwa bei

$$\tau_{\max} \approx 6,0 \text{ N/mm}^2 \quad (4.18)$$

und wurde als Ergebnis eines Parameter-Approximationsprozesses gefunden. Das heißt, der Parameter  $\tau_{\max}$  wurde solange verändert, bis die sich jeweils anschließende Simulation mit diesem Versagensmodell ein und des selben Versuches das Verformungs- und Delaminationsverhalten annähernd widerspiegelte, vgl. dazu die im Abschnitt 5.2 für einen sogenannten Laschenabzugsversuch vorgenommene Parameterskalierung.

Den Zahlenwerten in (4.17) und (4.18) liegen Materialien zu Grunde, wie sie für die Simulation des Bauteilversuches in Abschnitt 5.2 verwendet werden.

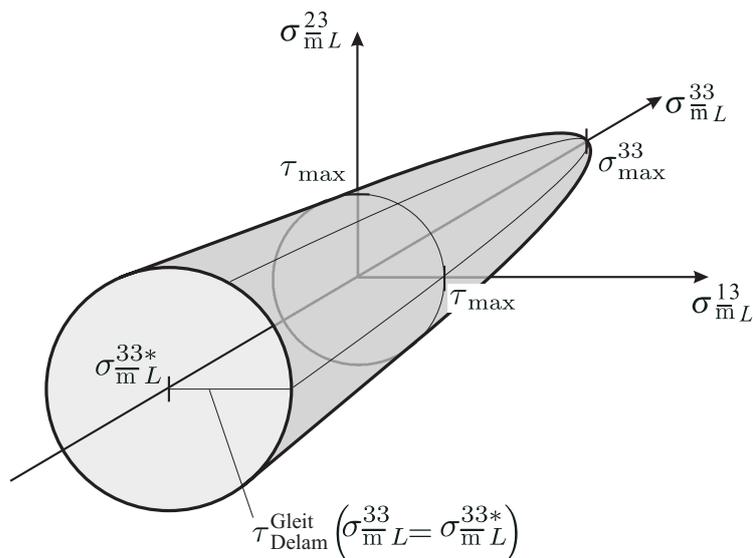
- Es wurde vereinfachend mit oben eingeführter Versagensfunktion (4.15) eine Extrapolation in den Druckbereich ( $\sigma_{\text{m}L}^{33} < 0$ ) vorgenommen, für die experimentelle Vergleichsdaten fehlen. Der Parameter  $p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) sollte so gewählt werden, dass die durch das Versagenskriterium zugelassenen Schubspannungen in Abhängigkeit von  $\sigma_{\text{m}L}^{33}$  im Druckbereich die maximalen Spannungen von homogenem Beton im zweiachsialen Belastungszustand nicht überschreiten. Je größer der Parameter  $p$  gewählt wird, desto weniger zulässige bzw. mögliche Spannungszustände gibt es nach (4.15). Im Rahmen dieser Arbeit wird bei Anwendung des Modells für Schichtungen aus Beton und Textilbeton

$$p = 2 \quad (4.19)$$

gewählt.

Eine Grenze für die maximale Druckspannung, also etwa  $\sigma_{\text{min}}^{33}$ , wird nicht verwendet, weil davon ausgegangen wird, dass im Fall sehr großer Druckspannungen in einer Verbundfläche senkrecht zur Schicht die vorhandenen Querkzugspannungen im Schalenkontinuum der angrenzenden Schichten ein intralaminäres Versagen - im Gegensatz zum interlaminären Versagen (Delamination) - maßgebend machen, was im Rahmen dieser Arbeit durchweg nicht thematisiert wird. Das heißt, das Modell berücksichtigt keine Schädigung in Form von Delamination, welche die direkte Folge sehr großer Druckspannungen senkrecht zur Gelegefläche sind. Durch die Vorgabe von nur drei Parametern ( $\sigma_{\text{max}}^{33}$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $p$ ) für das Versagenskriterium wurden die Parameterstudien bewusst einfach gestaltet - was den Erkenntnissen aus den Versuchen hinsichtlich der Materialeigenschaften des Verbundmaterials Textilbeton und den Streuungen der Versuchsergebnisse Rechnung trägt.

Verglichen werden kann diese Versagensfunktion mit dem Delaminationskriterium in [BREWER, LAGACE 1988], das im gleichen Koordinatensystem wie die hier vorgestellte Versagensfunktion  $V$  formuliert ist, bei dem jedoch zum Einen unterschiedliche maximale Schubspannungen  $\sigma_{\text{max}}^{13}$  und  $\sigma_{\text{max}}^{23}$  für die Koordinaten  $\sigma_{\text{m}L}^{13}$  und  $\sigma_{\text{m}L}^{23}$  angegeben werden und zum Anderen eine Grenze für die Druckspannung  $\sigma_{\text{min}}^{33}$  angegeben wird. Es ist problemlos möglich auch dieses Delaminationskriterium in das Mehrschichten-Schalenmodell zu integrieren.

Abbildung 4.5: Versagensfläche  $V(\sigma_{\bar{m}L}^{13}, \sigma_{\bar{m}L}^{23}, \sigma_{\bar{m}L}^{33}) = 0$ **Versagensfläche.**

Es ist  $V < 0$  in einem Integrationspunkt der Schicht  $\mathcal{B}_L$  im Fall des Verbundes der Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$ . Bei

$$V = 0 \quad (4.20)$$

tritt Delamination ein. Die Form der Versagensfläche  $V = V(\sigma_{\bar{m}L}^{13}, \sigma_{\bar{m}L}^{23}, \sigma_{\bar{m}L}^{33}) = 0$  ist für  $p > 1$  in Abb. 4.5 dargestellt. Bei  $p = 1$  hätte die Versagensfläche die Form eines Kegels. Die maximal vom Verbund zu übertragende resultierende Schubspannung in Abhängigkeit von der vorhandenen senkrechten Druck- bzw. Zugspannung beträgt

$$\tau_{\text{Delam}}(\sigma_{\bar{m}L}^{33}) = \tau_{\max} \left( 1 - \frac{\sigma_{\bar{m}L}^{33}}{\sigma_{\max}^{33}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{mit } \sigma_{\bar{m}L}^{33} \leq \sigma_{\max}^{33}. \quad (4.21)$$

Ist in einem Integrationspunkt zwischen den Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  Delamination aufgetreten, kann diese im gesamten weiteren Lösungsprozess durch das NEWTON-RAPHSON-Verfahren nicht wieder rückgängig gemacht werden, d. h. das Versagenskriterium wird für diesen Punkt nicht mehr benötigt werden.

**Verhalten nach erfolgter Delamination.**

Für das Verhalten nach der Delamination werden die aus der Kontaktmechanik bekannten Bedingungen, das Durchdringungsverbot und ein Reibgesetz, durch das Adhäsionskräfte (Anhangskräfte zwischen den Molekülen zweier Körper) berücksichtigt werden, im delaminierten Bereich  ${}^e\mathcal{S}_L$  eingeführt. Dabei werden aus kontaktmechanischer Sicht zwei Zustände unterschieden: Kontakt und kein Kontakt. Unmittelbar nach der Delamination in einem Punkt besteht in diesem Punkt Kontakt.

**4.4 Innerer Kontakt**

Während sich die oberflächenorientierte Einschichten-Schalentheorie für den Einsatz in allgemeinen Kontaktproblemen eignet, wie in Abschnitt 2.9.4 beschrieben, werden innerhalb der oberflächenorientierten Mehrschichten-Schalentheorie Bedingungen, die aus der Kontaktmechanik herühren, verwendet, um das Verhalten nach erfolgter Delamination in der Delaminationsfläche zu

beschreiben. Dafür wird nicht die Entwicklung passender Kontaktelemente angestrebt, sondern vielmehr werden die aus den Kontaktbedingungen herrührenden Steifigkeiten direkt in das finite Mehrschichten-Schalenelement integriert.

#### 4.4.1 Grundlagen zum Kontakt

Die der Kontaktformulierung im Mehrschichten-Schalenelement zu Grunde gelegten Kontaktbedingungen folgen im Wesentlichen den Formulierungen, die u. a. in [WRIGGERS 1995], [LAURSEN 2002], [WRIGGERS 2001] und [WILLNER 2003] zu finden sind, und sind an die besonderen Ansprüche bei der Simulation von flächenhaftem Verbund angepasst. Im Allgemeinen werden in diesen Arbeiten beim Kontakt zwischen zwei Körpern  $\mathcal{B}_S$  und  $\mathcal{B}_M$  Bedingungen für die Richtungen tangential an die Oberfläche von  $\mathcal{B}_M$  (Tangentialkontakt) und senkrecht zur Oberfläche von  $\mathcal{B}_M$  (Normalkontakt) unterschieden, wobei  $\mathcal{B}_S$  als Slave und  $\mathcal{B}_M$  als Master bezeichnet werden.

##### Kontaktkinematik.

Die kinematische Beschreibung des Kontakts erfolgt zwischen den zwei o. g. Körpern  $\mathcal{B}_S$  und  $\mathcal{B}_M$ , wobei  $\hat{\mathcal{B}}_S$  und  $\hat{\mathcal{B}}_M$  die Menge aller Punkte im Inneren des jeweiligen Kontaktkörpers bezeichnet. Berühren sich diese zwei Körper während eines Deformationsprozesses, s. Abb. 4.6, so wird das

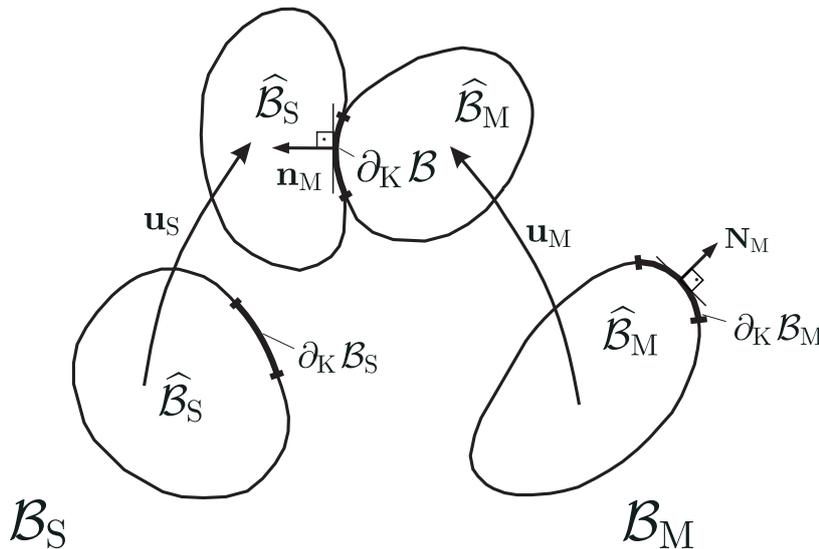


Abbildung 4.6: Konfiguration zweier Kontaktpartner

Eindringen des einen Körpers in den anderen Körper durch

$$\hat{\mathcal{B}}_S \cap \hat{\mathcal{B}}_M = 0 \quad (4.22)$$

ausgeschlossen und es existiert die Kontaktfläche

$$\partial_K \mathcal{B} = \partial \mathcal{B}_S \cap \partial \mathcal{B}_M \neq 0 . \quad (4.23)$$

Im Kontaktzustand wird die Kontaktoberfläche  $\partial_K \mathcal{B}_S$  des sogenannten Slave-Elements mit Hilfe der krummlinigen Koordinaten  $\Theta_S^1, \Theta_S^2$  durch  $\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_S(\Theta_S^1, \Theta_S^2)$  und die Kontaktoberfläche  $\partial_K \mathcal{B}_M$  des sogenannten Master-Elements mit Hilfe der krummlinigen Koordinaten  $\Theta_M^\alpha = \Theta^\alpha$  durch  $\mathbf{x}_M = \mathbf{x}_M(\Theta_S^1, \Theta_S^2)$  beschrieben. Damit lässt sich das Basissystem  $\mathbf{a}_{1M}, \mathbf{a}_{2M}$  des Masterkörpers mit  $\mathbf{n}_M$  als Normalenvektor berechnen. Die Lage der Punkte der Referenzkonfiguration vor dem aktuellen Kontaktzustand wird durch die Vektoren  $\mathbf{X}_S$  und  $\mathbf{X}_M$  beschrieben.

**Kontaktbedingungen.**

Die Abstandsfunktion

$$g_N(\mathbf{X}_S) = \min(\mathbf{x}_S(\mathbf{X}_S) - \mathbf{x}_M(\mathbf{X}_M)) = (\mathbf{x}_S(\mathbf{X}_S) - \bar{\mathbf{x}}_M(\mathbf{X}_M)) \cdot \bar{\mathbf{n}}_M \quad (4.24)$$

wird durch den zu einem Punkt  $\mathbf{x}_S$  des Slavekörpers gefundenen minimalen Abstand zu einem Punkt  $\bar{\mathbf{x}}_M$  des Masterkörpers definiert. Als Kontaktbedingung in Normalenrichtung wird das Durchdringungsverbot

$$g_N \geq 0 \quad (4.25)$$

eingeführt und weiterhin gefordert, dass in Normalenrichtung keine Zugspannungen übertragen werden dürfen:

$$p_N \leq 0. \quad (4.26)$$

Damit ist die Kontaktnormalspannung  $p_N$  eingeführt. Zwischen diesen beiden Größen besteht bei Forderung nach exakter Erfüllung der Kontaktbedingungen zusätzlich eine Komplementaritätsbedingung,

$$p_N g_N = 0, \quad (4.27)$$

die auch SIGNORINI-Bedingung genannt wird. Die relative tangentielle Verschiebung zweier Kontaktkörper, auch Schlupf genannt, wird durch den Vektor

$$\mathbf{g}_T = (\mathbf{x}_S(\mathbf{X}_S) - \mathbf{x}_M(\mathbf{X}_M)) \cdot \mathbf{a}_{\beta M} a_M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\alpha M} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{g}_T| = g_T \quad (4.28)$$

beschrieben. In Tangentialrichtung wird mit Hilfe einer Reibbedingung

$$R = |\boldsymbol{\tau}| - \tau_{\max, K} \leq 0 \quad (4.29)$$

zwischen Haften und Gleiten der Kontaktpartner unterschieden. Dabei steht  $\boldsymbol{\tau}$  für die Schubspannung in der Kontaktfläche und  $\tau_{\max, K}$  für eine maximal übertragbare Schubspannung, die von verschiedenen konstitutiven Variablen abhängig ist. Ist

$$R < 0, \quad \text{folgt} \quad \Delta g_T = 0 \quad (4.30)$$

und die Körper haften, entweder nachdem sie schon vorher gegeneinander verschoben wurden oder noch nicht. Ist

$$R = 0, \quad \text{folgt} \quad \Delta g_T \geq 0 \quad (4.31)$$

und die Körper beginnen zu gleiten und werden gegeneinander verschoben. Durch  $\Delta g_T$  wird die Änderung des Schlupfes in Richtung der Schubspannung  $\boldsymbol{\tau}$  symbolisiert. In Analogie zu (4.27) kann so die SIGNORINI-Bedingung für den Tangentialkontakt formuliert werden:

$$R \Delta g_T = 0. \quad (4.32)$$

**Virtuelle Kontaktarbeit.**

Bei der Formulierung der virtuellen Kontaktarbeiten wird an das in Abschnitt 2.7 formulierte Prinzip der virtuellen Verschiebungen eines im Gleichgewicht befindlichen materiellen Körpers angeknüpft. Die Summe der virtuellen Arbeiten  $\delta W$ , vgl. (2.151), aller inneren und äußeren Kraftgrößen mit den zugehörigen virtuellen Weggrößen, die im Gleichgewichtszustand verschwindet, wird um die Summe der virtuellen Kontaktarbeiten  $\delta W_K$  erweitert:

$$\delta W = - \int_B \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV + \int_B \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_S {}_0 \mathbf{F}_a \cdot \delta {}_0 \mathbf{u} dA + \delta W_K. \quad (4.33)$$

Die Variation dieser Gleichung führt unter Berücksichtigung der im vorangegangenen Abschnitt aufgeführten Bedingungen zunächst auf eine variationelle Ungleichung, die nach Einführung konstitutiver Gesetze für  $p_N$  und  $\boldsymbol{\tau}$  in

$$\begin{aligned} \delta W = & - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\mathcal{S}} {}_0 \mathbf{F}_a \cdot \delta {}_0 \mathbf{u} dA + \\ & + \int_{\partial_K \mathcal{B}} p_N \delta g_N da_K + \int_{\partial_K \mathcal{B}} \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{g}_T da_K = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

überführt werden kann, vgl. [WILLNER 2003]. Es wird das anfängliche Kontaktproblem in Einzelprobleme zerlegt, für welche die Variationsgleichung (4.34) zur Anwendung kommen kann, wobei die Kontaktbedingungen, d. h., die beiden letzten Summanden in (4.34), als Nebenbedingungen eingebracht werden. Das heißt, es wird zunächst eine potenzielle Kontaktfläche  $\partial_K \mathcal{B}$  mit Hilfe der kinematischen Kontaktbedingungen festgelegt, für die die Berechnung der Verschiebungen und Spannungen durchgeführt wird. Es muss nun nachträglich überprüft werden, ob alle Punkte in der Kontaktfläche die Bedingungen im Kontaktproblem erfüllen. Punkte, welche die kinetischen Bedingungen nicht erfüllen, werden aus der Kontaktfläche entfernt. Punkte außerhalb der Kontaktfläche, welche die kinematischen Bedingungen erfüllen, d. h. für welche Durchdringung bzw. Berührung festgestellt wird, werden in die Kontaktfläche aufgenommen. Dieser Berechnungszyklus ist mit der jeweils neuen Kontaktfläche solange zu wiederholen, bis sich diese nicht mehr ändert. Für das Einbringen der Kontakt-Nebenbedingungen stehen zahlreiche Verfahren zur Verfügung: Die Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren, das Perturbed-LAGRANGE-Verfahren, die jedoch beide nur mit zusätzlichen Freiheitsgraden im zu lösenden Gleichungssystem auskommen, das Augmented-LAGRANGE-Verfahren, das gegenüber dem letzten, dem Penalty-Verfahren, jedoch einen etwas erhöhten numerischen Aufwand bedeutet.

Die Kontaktbedingungen in Normalenrichtung und in Tangentialrichtung werden im Rahmen dieser Arbeit in unterschiedlicher Weise berücksichtigt. Beim Penalty-Verfahren, das im Weiteren Verwendung findet, werden die Nebenbedingungen durch die Einführung konstitutiver Gesetze in das Funktional eingeführt, wie z. B. das Überführen der Kontaktnormalspannung (4.26) in eine Funktion

$$p_N = p_N(g_N) \quad (4.35)$$

in Abhängigkeit von der im Sinne der Kontaktarbeit konjugierten Bewegungsgröße  $g_N$ . Für den Anteil der Normalkontaktarbeit in (4.34) wird im Weiteren eine Linearisierung für die Ermittlung der Anteile in der tangentialen Kontakt-Steifigkeitsmatrix der Finite-Elemente-Methode durchgeführt, was dessen Berücksichtigung in den Iterationsschritten innerhalb der Lastschritte des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens gewährleistet. So wie die Kontaktnormalspannung kann auch die Schubspannung

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(p_N(g_N), \mathbf{g}_T, \dots) \quad (4.36)$$

in der Kontaktfläche als Funktion in Abhängigkeit von Bewegungsgrößen dargestellt werden. In [WILLNER 2003] wird eine konsistente Linearisierung auch des Anteils der Tangentialkontaktarbeit aus COULOMBScher Reibung für die Ermittlung der Anteile in der tangentialen Kontakt-Steifigkeitsmatrix der Finite-Elemente-Methode angegeben. Dem Anteil der virtuellen Kontaktarbeit infolge Reibung liegt jedoch kein Potenzial zu Grunde, d. h. eine Entlastung der Kontaktpartner würde keine vollständige Rückverformung mit Umkehrung des zurückgelegten Gleitweges zur

Folge haben. Im Rahmen dieser Arbeit kommt eine nichtlineare Abhängigkeit der Schubspannung (4.36) von der Bewegungsgröße  $\mathbf{g}_T$  zur Anwendung, die Probleme bereitet, wenn man zuverlässig Konvergenz bei der Lösung des Gleichungssystems durch Linearisierung des Arbeitsanteils erzielen will.

Deshalb wird der Anteil der Tangentialkontaktarbeit in (4.34) im Weiteren durch das Einprägen der Reaktionsgröße  $\tau$  als Erweiterung des Lastvektorfeldes  $\mathbf{F}_a$  in den Lastschritten des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens berücksichtigt.

#### 4.4.2 Kontakt zwischen Schichten – Normalkontakt

Betrachtet werden in diesem Abschnitt die Schichten  $\mathcal{B}_R$  und  $\mathcal{B}_{R-1}$  - die Indizierungen können ausgetauscht werden. Kontaktbedingungen gelten im Rahmen der entwickelten Mehrschichten-Schalenkinematik an den Stellen von  $\mathcal{S}_R$  zwischen den Schichten

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_R &= \mathcal{B}_M && \text{(Master) und} \\ \mathcal{B}_{R-1} &= \mathcal{B}_S && \text{(Slave) für } R > 1, \end{aligned} \quad (4.37)$$

an denen im Bereich  ${}^e\mathcal{S}_R$ , vgl. Abschnitt 4.2 und Abb. 4.3, die Mehrschichten-Schalenkinematik in Punkten ohne Schichtenverbund (4.2) gilt, d. h. in denen die Schichten  $\mathcal{B}_R$  und  $\mathcal{B}_{R-1}$  ihren Verbund verloren haben. Für diese beiden Schichten gilt für die Schalennormale

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_R^3 = \mathbf{N}_M = \mathbf{A}_{R-1}^3, \quad (4.38)$$

vgl. Abb. 4.6. Kontakt wird hier demnach nicht zwischen zwei verschiedenen finiten Elementen detektiert, sondern nur zwischen Punkten aneinandergrenzender Schichten des selben Elementes, wobei die Auswertung der Bedingungen zwischen Punkten erfolgt, die im Ausgangszustand auf der selben  $\Theta_1^3$ -Linie lagen. Durch diese Vereinfachung, die im Rahmen kleiner zu erwartender Relativverschiebungen von delaminierten Schichten durchaus getroffen werden kann, entfällt die aus klassischen Kontaktproblemen bekannte Suche nach der Lage der Punkte, in denen Kontakt besteht. Dem Anteil der virtuellen Kontaktarbeit zur Realisierung des Durchdringungsverbotens liegt solange ein Potenzial zu Grunde, solange es zwischen den Schichten  $\mathcal{B}_R$  und  $\mathcal{B}_{R-1}$  für  $R > 1$  in Punkten  ${}_0p_R$  des verformten Systems eine Durchdringung gibt, die durch das Penalty-Verfahren minimiert wird. Es werden in jedem Iterationsschritt für den Fall einer numerisch entstandenen Durchdringung, die Anteile aus Normalkontaktarbeit in der tangentialen Steifigkeitsmatrix des finiten Elementes berücksichtigt, vgl. Abschnitt 4.4.1.

Dafür wird der Anteil der virtuellen Normalkontaktarbeit  $\delta W_n$  wie in (4.34) aufgebaut und eine Linearisierung zur Ermittlung der Anteile in der tangentialen Steifigkeitsmatrix (4.9) und dem Vektor der inneren Kräfte (4.10) analog dem in Abschnitt 2.9 ausgehend von (2.203) beschriebenen Vorgehen durchgeführt:

$$\delta w_i + \left. \frac{\partial (\delta w_i)}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^*} \cdot \Delta \mathbf{u} + \delta w_n + \left. \frac{\partial (\delta w_n)}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^*} \cdot \Delta \mathbf{u} + \delta w_a = 0. \quad (4.39)$$

Es bezeichnet  $\delta w_n$  die virtuelle Normalkontaktarbeit in einem Punkt  ${}_0P$  im Kontaktbereich einer Schicht.

#### Abstand.

Die charakteristische Größe als Entscheidungskriterium zwischen den Zuständen Kontakt und kein Kontakt und für die Beschreibung des Normalkontaktverhaltens ist die Abstandsfunktion

$$\mathbf{g}_{NR} = \bar{g}_{NR} \mathbf{A}_R^3 = g_{NjR} \mathbf{e}^j = g_{NR}^j \mathbf{e}_j \quad (4.40)$$

zweier Schichten  $\mathcal{B}_R$  und  $\mathcal{B}_{R-1}$  für  $R > 1$ . Diese wird mit Hilfe der Maßzahlen  ${}_0\bar{u}_{jR}$  und  $\bar{u}_{jR-1}$  der in Abschnitt (3.2) durch (3.21) eingeführten Verschiebungsfelder

$$\mathbf{u}_R|_{\Theta_R^3=0} = {}_0\mathbf{u}_R = {}_0u_{iR} \mathbf{e}^i = {}_0\bar{u}_{jR} \mathbf{A}_R^j \quad (4.41)$$

der Referenzfläche  $\mathcal{S}_R$  der Schicht  $\mathcal{B}_R$  und

$$\mathbf{u}_{R-1}|_{\Theta_{R-1}^3=H_{R-1}} = \sum_{l=0}^{d_{R-1}} ({}_l\Omega_{R-1}(H_{R-1}) {}_l\mathbf{u}_{R-1}) = u_{iR-1} \mathbf{e}^i = \bar{u}_{jR-1} \mathbf{A}_{R-1}^j \quad (4.42)$$

der der Referenzfläche der Schicht  $\mathcal{B}_{R-1}$  gegenüberliegenden Schichtenoberfläche durch

$$\bar{g}_{NR} = {}_0\bar{u}_{3R} - \bar{u}_{3R-1} = {}_0\bar{u}_{3R} - \sum_{l=0}^{d_{R-1}} \left( (H_{R-1})^l {}_l\bar{u}_{3R-1} \right) \quad (4.43)$$

berechnet. Die Ermittlung des Abstands bezüglich der Schalennormalen im unverformten Zustand auf der Grundlage der Verschiebungen von Punkten der zwei Schichten, die im Ausgangszustand an der selben Stelle lagen, hat sich zur Erfüllung des Durchdringungsverbot in den numerischen Anwendungen als ausreichend und zuverlässig erwiesen. Es wird dadurch jedoch nicht wie in (4.24) gefordert, der minimale Abstand in der Momentankonfiguration des betrachteten Punktes der Schicht  $\mathcal{B}_R$  zu einem - durch Kontaktsuchalgorithmen zu findenden - Punkt in  $\mathcal{B}_{R-1}$  ermittelt. Zunächst werden in (4.43) die auf die lokale Schalenbasis der Schichtoberfläche bezogenen Verschiebungsmaße durch die auf die kartesische Basis bezogenen Verschiebungsmaße, die Freiwerte (3.39) des zulösenden Gleichungssystems sind, durch Koordinatentransformation

$$\bar{g}_{NR} = \left( {}_0u_{iR} - \sum_{l=0}^{d_{R-1}} \left( (H_{R-1})^l {}_l u_{iR-1} \right) \right) \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{A}_3 \quad (4.44)$$

ersetzt. Das so erhaltene Maß bezüglich der Basis der Schalennormalen ist bereits eine physikalische Länge, da die Schalennormale im unverformten Zustand normiert ist. Es dient der Feststellung, ob die Schicht  $\mathcal{B}_{R-1}$  am untersuchten Punkt in die Schicht  $\mathcal{B}_R$  eingedrungen ist bzw. die Schichten sich berühren und damit aus numerischen Gesichtspunkten Kontakt zwischen den Schichten vorliegt, vgl. (4.25). Dies ist der Fall, wenn  $\bar{g}_{NR} \leq 0$  gilt. Nur dann werden zur Erfüllung der Forderung  $\bar{g}_{NR} = 0$  Anteile in der Elementsteifigkeitsmatrix und dem Vektor der inneren Kräfte berechnet.

Die auf die kartesische Basis bezogenen Maße des Abstandsvektors  $g_{NR}$  werden durch eine weitere Transformation erhalten:

$$g_{NkR} = \bar{g}_{NR} \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{e}_k = \left( {}_0u_{iR} - \sum_{l=0}^{d_{R-1}} \left( (H_{R-1})^l {}_l u_{iR-1} \right) \right) \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{A}_3 \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{e}_k. \quad (4.45)$$

Durch Einführung der Diskretisierung (2.217) erhält man für die Maßzahlen der Abstandsfunktion in Normalenrichtung

$$g_{NkR} = \sum_{e=1}^9 e_n \left( {}_e u_{iR} - \sum_{l=0}^{d_{R-1}} \left( (H_{R-1})^l {}_l^e u_{iR-1} \right) \right) \beta_3^i \bar{\beta}_k^3, \quad (4.46)$$

mit den Transformationskoeffizienten

$$\beta_3^i = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{A}_3 \quad \text{und} \quad \bar{\beta}_k^3 = \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{e}_k. \quad (4.47)$$

Die zur Berechnung der tangentialen Steifigkeitsmatrix benötigte Ableitung der Abstandsmaße (4.46) nach den Verschiebungsfreiwerten  ${}^f_m u_{jL}$  des Gleichungssystems wird zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{NkR}}{\partial {}^f_m u_{jL}} &= \sum_{e=1}^9 e_n \left( {}^e_f \delta^0_m \delta^i_j \delta^R_L \delta - \sum_{l=0}^{d_{R-1}} \left( (H_{R-1})^l {}^e_f \delta^l_m \delta^i_j \delta^{R-1}_L \delta \right) \right) \beta_3^i \bar{\beta}_k^3 \\ &= {}^f_n \left( {}^0_m \delta^R_L \delta - (H_{R-1})^m {}^R_{L-1} \delta \right) \beta_3^j \bar{\beta}_k^3. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die Ableitung beliebiger Verschiebungsfreiwerte des finiten Elementes nach den Verschiebungsfreiwerten  ${}^f_m u_{jL}$  wird dabei analog (2.242) durchgeführt, wobei sich jeweils das Delta (2.241) ergibt.

### Tangentiale Kontakt-Steifigkeitsmatrix und Vektor der inneren Kontakt-Kräfte.

Wie in Abschnitt 4.4.1 wird die Kontaktnormalspannung, die sich im Fall der Berührung zwischen den Schichten  $\mathcal{B}_R$  und  $\mathcal{B}_{R-1}$  für  $R > 1$  in Punkten  ${}^0 p_R$  des verformten Systems bezüglich der Schicht  $\mathcal{B}_R$  einstellt, durch

$$\mathbf{p}_{NR} = p_{NR}^i \mathbf{e}_i \quad (4.49)$$

eingeführt. Mit der Kontaktnormalspannung und der Abstandsfunktion (4.40) wird die virtuelle Kontaktarbeit des Normalkontakts in der Variationsgleichung (4.34) durch

$$\delta W_n = \sum_{R=2}^{n_s} \left( \int_{\partial_K \mathcal{B}} \mathbf{p}_{NR} \cdot \delta \mathbf{g}_{NR} dA_K \right) \quad (4.50)$$

berücksichtigt, die nach der Linearisierung (4.39) durch

$$\delta W_n = \sum_{R=2}^{n_s} \left( \int_{\partial_K \mathcal{B}} \mathbf{p}_{NR} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_{NR}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dA_K \right) = \sum_{R=2}^{n_s} \left( \int_{\partial_K \mathcal{B}} p_{NR}^i \frac{\partial g_{NiR}}{\partial {}^f_m u_{jL}} \delta {}^f_m u_{jL} dA_K \right) \quad (4.51)$$

geschrieben werden kann. Der Arbeitsanteil aus Normalkontakt zwischen den Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  wird dabei jeweils durch den Summanden für  $R = L$  erfasst, so dass über alle Kontaktflächen  $\partial_K \mathcal{B}$  von Schicht  $\mathcal{B}_2$  bis zur Schicht  $\mathcal{B}_{n_s}$  (mit  $n_s$  als Anzahl der Schichten) summiert werden muss. Durch Überführen der Kontaktnormalspannung (4.49) in eine Funktion

$$\mathbf{p}_{NR} = \alpha_N \mathbf{g}_{NR}, \quad p_{NR}^i = \alpha_N g_{NR}^i \quad (4.52)$$

in Abhängigkeit von der im Sinne der Kontaktarbeit konjugierten Bewegungsgröße (4.40), analog (4.35), kann das Verbot der Durchdringung der Kontaktpartner als Nebenbedingung in der Variationsgleichung erfasst werden, wobei damit die virtuelle Kontaktarbeit in folgende Form übergeht:

$$\delta W_n = \sum_{R=2}^{n_s} \left( \int_{\partial_K \mathcal{B}} \alpha_N g_{NR}^i \frac{\partial g_{NiR}}{\partial {}^f_m u_{jL}} \delta {}^f_m u_{jL} dA_K \right). \quad (4.53)$$

Strebt der sogenannte Penalty-Parameter

$$\alpha_N \rightarrow \infty, \quad (4.54)$$

wird die Nebenbedingung exakt berücksichtigt. Die Wahl eines zu großen Penaltyparameters führt aber zu einer schlechten Kondition der tangentialen Steifigkeitsmatrix. Der Vektor der inneren Kräfte aus allen Kontaktflächen am finiten Mehrschichten-Element ist

$$\underline{\mathbf{f}}^{\text{KN}} = \sum_{R=2}^{n_s} \left( \int_{\partial_k \mathcal{B}} \alpha_N \mathbf{g}_{NR} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_{NR}}{\partial \mathbf{u}} dA_K \right), \quad (4.55)$$

wobei dessen Elemente durch

$$f_m^j \mathbf{f}_{jL}^{\text{KN}} = \sum_{R=2}^{n_s} \left( \int_{\partial_k \mathcal{B}} \alpha_N g_{NR}^i \frac{\partial g_{NiR}}{\partial_m^j u_{jL}} dA_K \right) \quad (4.56)$$

berechnet werden, worin (4.48) eingesetzt wird. Die konsequente Fortführung der Linearisierung (4.39) ergibt unter Beachtung der Produktregel zunächst

$$\underline{\mathbf{f}}^{\text{KN}} + \sum_{R=2}^{n_s} \left( \int_{\partial_k \mathcal{B}} \alpha_N \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{NR}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_{NR}}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{g}_{NR} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{NR}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} \right) dA_K \right) \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (4.57)$$

was sich aber wegen der nur linearen Abhängigkeit der Abstandsfunktion von den Verschiebungsfreiwerten des finiten Elementes vereinfachen lässt und woraus die tangentiale Normalkontakt-Elementsteifigkeitsmatrix

$$\underline{\mathbf{k}}_{\text{T}}^{\text{KN}} = \sum_{R=2}^{n_s} \left( \int_{\partial_k \mathcal{B}} \alpha_N \frac{\partial \mathbf{g}_{NR}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_{NR}}{\partial \mathbf{u}} dA_K \right) \quad (4.58)$$

des finiten Mehrschichten-Element mit ihren Elementen

$$s_m^f k_{jpLM}^{\text{KN}} = \sum_{R=2}^{n_s} \left( \int_{\partial_k \mathcal{B}} \alpha_N \frac{\partial g_{NR}^i}{\partial_m^f u_{jL}} \frac{\partial g_{NiR}}{\partial_n^s u_{pM}} dA_K \right) \quad (4.59)$$

hervorgeht, worin wiederum (4.48) eingesetzt wird.

Die Indizierungen an den Elementen (4.56) des Kontakt-Elementvektors der inneren Kräfte und (4.59) der tangentialen Kontakt-Elementsteifigkeitsmatrix des Normalkontakts ergeben sich als konsequente Fortführung der Indizierungen der Elemente von (2.267) und (2.268) der Einschichtentheorie bzw. von (3.43) und (3.45) der Mehrschichtentheorie. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Darstellung der Elemente der tangentialen Kontakt-Elementsteifigkeitsmatrix entsprechend ihrer Berechnung durch vorangestellte zweifache untere und obere und nachgestellte vierfache untere Indizierung  $s_m^f \square_{jpLM}$  mit natürlichen Zahlen  $s, f, n, m, j, p, L, M \in \mathbb{N}$  derart erfolgt, dass die inneren Indizierungen  $f, m, j, L$  die selben Indizierungen wie die der Element-Knotenverschiebung sind, nach der die erste Ableitung der Abstandsgröße gebildet wurde und die äußeren Indizierungen  $s, n, p, M$  die selben Indizierungen wie die der Element-Knotenverschiebung sind, nach der die zweite Ableitung der Abstandsgröße bei der Berechnung gebildet wurde. Der Kontakt-Elementvektor erhält seine Indizierung analog dazu nur aus der ersten Ableitung der Abstandsgröße. Die Elemente der tangentialen Kontakt-Elementsteifigkeitsmatrix (4.59) für die Mehrschichtentheorie besitzen im Unterschied zu den Elementen der tangentialen

Elementsteifigkeitsmatrix (3.45) der Schichten der Mehrschichtentheorie zwei Indizierungen, welche Schichten kennzeichnen. Das macht deutlich, dass es aus Kontakt in der Steifigkeitsmatrix Kopplungen zwischen Schichten gibt.

### Gesamt-Elementvektor der inneren Kräfte und Gesamt-Elementsteifigkeitsmatrix.

Der Elementvektor der inneren Kräfte (4.10) und die Elementsteifigkeitsmatrix (4.9) des allgemeinen finiten Mehrschichtenelements werden jeweils mit (4.55) und (4.58) additiv überlagert, so dass die wegen Delamination im allgemeinen finiten Mehrschichtenelement fehlenden Kopplungen zwischen Schichten zum Einen ggf. durch Normal-Kontaktsteifigkeiten hergestellt werden. Zum Anderen kommen die im Folgenden behandelten Tangential-Kontaktsteifigkeiten hinzu.

#### 4.4.3 Tangentialkontakt

Kräfte infolge von Reibung zwischen Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  in Punkten  ${}_0p_L$  des verformten Systems, in denen Kontakt besteht, werden als äußere Lasten in das System tangential an die Schichtenreferenzfläche  $\mathcal{S}_L$  und an die der Schichtenreferenzfläche gegenüberliegende Schichtenoberfläche in den Lastschritten des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens eingetragen.

#### Schlupf.

Das für die Beschreibung des Tangentialkontaktverhaltens wichtigste Maß ist die insgesamt im aktuellen Zustand vorhandene relative Tangentialverschiebung

$$\mathbf{g}_{TL} = \tilde{g}_{T\alpha L} \bar{\mathbf{m}}_L^\alpha = \tilde{g}_{TL}^\alpha \bar{\mathbf{m}}_{\alpha L} = g_{Tkl} \mathbf{e}^k \quad (4.60)$$

zweier Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  zueinander, häufig auch Schlupf genannt. Diese wird in der Tangentialebene an die Referenzfläche  $\mathcal{S}_L$  im Berührungspunkt  ${}_0p_L$  der Schichten im verformten Zustand ermittelt, wobei hier davon ausgegangen wird, dass in diesem Punkt in den zurückliegenden Zuständen jederzeit Kontakt bestand. Dafür werden die Maßzahlen  ${}_0u_{iL}$  und  $u_{iL-1}$  der in Abschnitt (3.2) durch (3.21) eingeführten Verschiebungsfelder

$$\mathbf{u}_L|_{\Theta_L^3=0} = {}_0\mathbf{u}_L = {}_0u_{iL} \mathbf{e}^i = {}_0\bar{u}_{jL} \mathbf{A}_L^j = {}_0\tilde{u}_{kL} \bar{\mathbf{m}}_L^k \quad (4.61)$$

der Referenzfläche  $\mathcal{S}_L$  der Schicht  $\mathcal{B}_L$  und

$$\mathbf{u}_{L-1}|_{\Theta_{L-1}^3=H_{L-1}} = \sum_{l=0}^{d_{L-1}} ({}_l\Omega_{L-1}(H_{L-1}) {}_l\mathbf{u}_{L-1}) = u_{iL-1} \mathbf{e}^i = \tilde{u}_{kL-1} \bar{\mathbf{m}}_L^k \quad (4.62)$$

der der Referenzfläche der Schicht  $\mathcal{B}_{L-1}$  gegenüberliegenden Schichtenoberfläche in das aus Abschnitt (2.5.3), Gleichung (2.105) in die Mehrschichtentheorie übertragene normierte, orthogonale Basissystem  $\{\bar{\mathbf{m}}_L^i = \bar{\mathbf{m}}_{iL}; i = 1, 2, 3\}$  transformiert:

$${}_0\tilde{u}_{kL} = {}_0u_{iL} \mathbf{e}^i \cdot \bar{\mathbf{m}}_{kL}; \quad \tilde{u}_{kL-1} = u_{iL-1} \mathbf{e}^i \cdot \bar{\mathbf{m}}_{kL}. \quad (4.63)$$

Dieses Koordinatensystem, das die Geometrie der Schichtenoberfläche im verformten Zustand repräsentiert, eignet sich für die Formulierungen des Tangentialkontakts, da es physikalisch direkt interpretierbare Maßzahlen besitzt und tangential an die Oberfläche formuliert ist. Zudem wird dieses Koordinatensystem im Folgenden benutzt, um Spannungszustände auszuwerten. Die Basisvektoren  $\bar{\mathbf{m}}_{1L}$  und  $\bar{\mathbf{m}}_{2L}$  befinden sich in der Tangentialebene an die Referenzfläche  $\mathcal{S}_L$  im Punkt  ${}_0p_L$ , und  $\bar{\mathbf{m}}_{1L}$  weist in eine Materialhaupttrichtung des orthotropen Materials in der Referenzfläche der Schicht.

Das Reibmodell ist nicht nur, wie es beim COULOMBSchen Gesetz der Fall ist, mit einem normal zur relativen Bewegungsrichtung zweier Kontaktpartner wirkenden Anpressdruck verknüpft, sondern ist durch die Abnahme der durch Adhäsion vorhandenen maximal erreichbaren Schubfestigkeit zwischen den Schichten nach Überschreiten der charakteristischen Größe des verwendeten Versagenskriteriums in Abhängigkeit des resultierenden Gleitweges gekennzeichnet. Dazu wird der Betrag

$$g_{TL} = |\mathbf{g}_{TL}| = \sqrt{\tilde{g}_{T\alpha L} \tilde{g}_{TL}^\alpha} = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^2 (\tilde{g}_{T\alpha L})^2} \quad (4.64)$$

des resultierenden Gleitweges im Punkt  ${}_{0p_L}$  der Referenzfläche der Schicht  $\mathcal{B}_L$  berechnet, indem zunächst analog (4.43) der in tangentialer Richtung vorhandene Abstand der im verformten Zustand aneinandergrenzenden Punkte der Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  aus der Differenz

$$\tilde{g}_{T\alpha L} = {}_0\tilde{u}_{\alpha L} - \sum_{l=0}^{d_{L-1}} \left( (H_{L-1})^l \, {}_l\tilde{u}_{\alpha L-1} \right) \quad (4.65)$$

der tangentialen Anteile der Verschiebungsfelder (4.61) und (4.62) mit der darin eingesetzten Basisfunktion (3.13) berechnet wird. Es werden darin die auf das Basissystem  $\{\bar{\mathbf{m}}_L^i = \bar{\mathbf{m}}_{iL}; i = 1, 2, 3\}$  der Schichtoberfläche bezogenen Verschiebungen durch die auf das Basissystem  $\{\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i; i = 1, 2, 3\}$  bezogenen Verschiebungen durch Koordinatentransformation

$$\tilde{g}_{T\alpha L} = \left( {}_0u_{iL} - \sum_{l=0}^{d_{L-1}} \left( (H_{L-1})^l \, {}_l u_{iL-1} \right) \right) \mathbf{e}^i \cdot \bar{\mathbf{m}}_{\alpha L} \quad (4.66)$$

ersetzt und die auf das Basissystem  $\{\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i; i = 1, 2, 3\}$  bezogenen Maße des Abstandsvektors  $\mathbf{g}_{TL}$  durch eine weitere Transformation erhalten:

$$g_{TkL} = \left( {}_0u_{iL} - \sum_{l=0}^{d_{L-1}} \left( (H_{L-1})^l \, {}_l u_{iL-1} \right) \right) \mathbf{e}^i \cdot \bar{\mathbf{m}}_{\alpha L} \bar{\mathbf{m}}_L^\alpha \cdot \mathbf{e}_k. \quad (4.67)$$

Durch Einführung der Diskretisierung (2.217) erhält man für die Maßzahlen der Abstandsfunktion in Tangentialrichtung

$$g_{TkL} = \sum_{e=1}^9 e_n \left( {}_0^e u_{iL} - \sum_{l=0}^{d_{L-1}} \left( (H_{L-1})^l \, {}_l^e u_{iS-1} \right) \right) \mathbf{e}^i \cdot \bar{\mathbf{m}}_{\alpha L} \bar{\mathbf{m}}_L^\alpha \cdot \mathbf{e}_k. \quad (4.68)$$

### Kontakt-Schubspannung.

Der Schubspannungsvektor in der Kontaktfläche der Momentankonfiguration ist ein Teil des Spannungsvektors (3.33) der Oberfläche bzw. (4.14):

$$\boldsymbol{\tau}_{KL} = \sigma_{\bar{\mathbf{m}}L}^{\alpha 3} \bar{\mathbf{m}}_{\alpha L} \quad \text{mit} \quad \tau_L = |\boldsymbol{\tau}_{KL}|. \quad (4.69)$$

### Zulässige Spannungen unmittelbar nach dem Bruch.

Wenn Kontakt besteht, was im Augenblick des Versagens unterstellt wird, geht die maximal nach Verlust des Verbundes übertragbare resultierende Schubspannung in Tangentialrichtung in Abhängigkeit von der vorhandenen senkrechten Druckspannung anfangs von  $\tau_{\text{Delam}}(\sigma_{\bar{\mathbf{m}}L}^{33})$ , vgl. (4.21), zurück auf

$$\tau_{\text{Delam}}^{\text{Gleit}}(\sigma_{\bar{\mathbf{m}}L}^{33}) = \mu_0 \tau_{\text{max}} \left( 1 - \frac{\sigma_{\bar{\mathbf{m}}L}^{33}}{\sigma_{\text{max}}^{33}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\bar{\mathbf{m}}L}^{33} \leq 0, \quad (4.70)$$

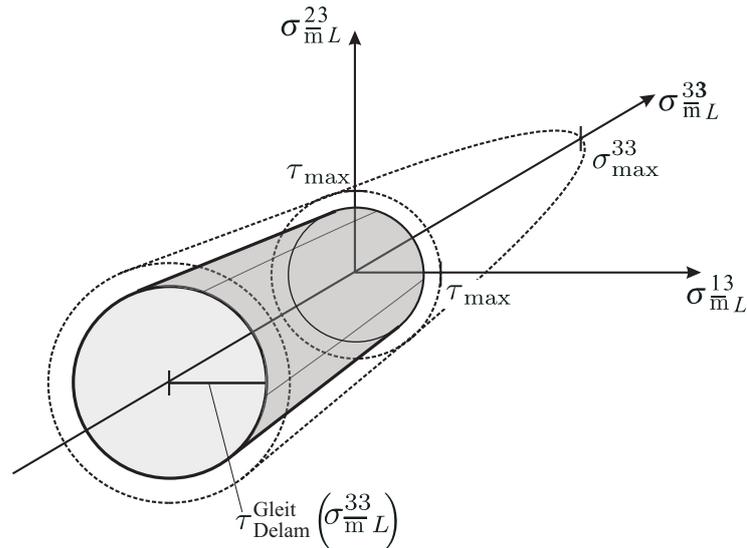


Abbildung 4.7: Zulässige Tangentialspannungen unmittelbar nach dem Bruch

da keine Zugspannung mehr übertragen werden kann, vgl. Abb. 4.7. Die Besonderheit dabei ist, dass im Unterschied zur klassischen COULOMBSchen Reibung hier im Fall von Kontakt auch bei nicht vorhandenem Kontaktdruck Tangentialspannungen übertragen werden. Die ohne Andruck zwischen den Kontaktpartnern wirkenden Tangentialspannungen tragen dem Vorhandensein von Adhäsion Rechnung. Der Parameter  $\mu_0$  ( $0 < \mu_0 < 1$ ) liegt bei stark verzahnten Delaminations-Rissflächen nahe bei Eins und würde bei fast völlig glatten Bruchflächen nahe bei Null liegen. In Abb. 4.8 sind die mechanischen Modelle, zu denen die Grenzwerte des Parameters  $\mu_0$  gehören, dargestellt. Es handelt sich bei  $\mu_0$  um einen Abminderungsfaktor, der materialabhängig die un-

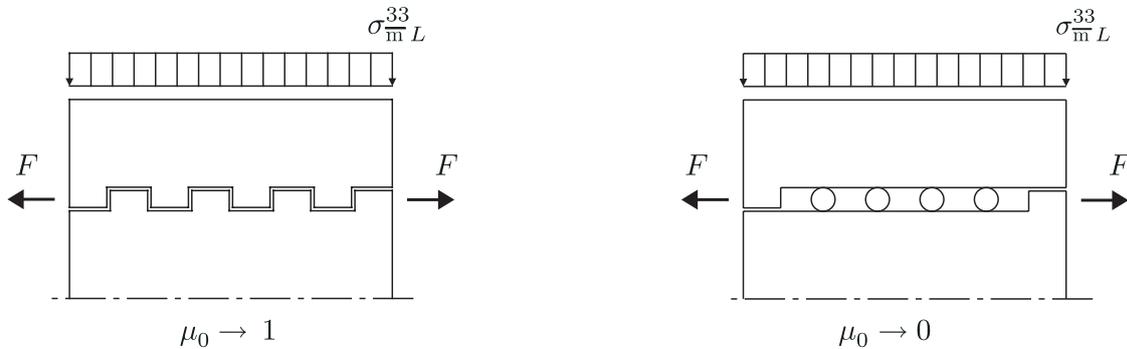


Abbildung 4.8: Mechanische Modelle für die Grenzwerte des Parameters  $\mu_0$

mittelbar nach dem Bruch in der Bruchfuge maximal übertragbare Schubspannung gegenüber der Schubspannung, die zum Bruch geführt hat, festlegt. Das heißt, er bewirkt im Druckbereich von  $\sigma_mL^33$  ausgehend von der Versagensfläche  $V(\sigma_mL^13, \sigma_mL^23, \sigma_mL^33) = 0$ , welche die Menge der Punkte vor dem Versagen zulässiger Spannungszustände einschließt, vgl. Abb. 4.5, eine Einschnürung des Körpers mit Punkten zulässiger Spannungszustände für das anfängliche Gleiten.

**Rückprojektion unmittelbar nach dem Bruch.**

Für den Spannungszustand  $\sigma_{KL}$ , vgl. (4.14), der sich während des Lösungsprozesses des Gleichungssystems durch das NEWTON-RAPHSON-Verfahren beim Bruch eingestellt hat, wird - sofern er im unzulässigen Bereich liegt - eine sogenannte Rückprojektion

$$\sigma'_{KL} = f(\sigma_{KL}) \tag{4.71}$$

auf die durch (4.70) beschriebene Fläche gerade noch zulässiger Spannungen durchgeführt, bei der die aktuelle Normalspannung

$$\sigma_{\bar{m}L}^{\prime 33} = \sigma_{\bar{m}L}^{33} \quad (4.72)$$

festgehalten wird (unverändert bleibt), wenn diese eine Druckspannung oder Null war. Als äußere Belastung für die Tangentialspannung im soeben delaminierten Bereich  ${}^e\mathcal{S}_L$  zwischen den Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  wird die am Integrationspunkt  ${}_0P_L(i_x, i_y, \Theta_L^3)|_{\Theta_L^3=0}$  rückprojizierte Schubspannung

$$\boldsymbol{\tau}'_{KL} = \sigma_{\bar{m}L}^{\prime \alpha 3} \bar{\mathbf{m}}_{\alpha L} = \sigma_L^{\prime i3} \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad |\boldsymbol{\tau}'_{KL}| = \tau_{\text{Delam}}^{\text{Gleit}}(\sigma_{\bar{m}L}^{\prime 33}) \quad (4.73)$$

eingetragen. Das bedeutet, die Schubspannung wird bei festgehaltener Normalspannung senkrecht zur  $\sigma_{\bar{m}L}^{33}$ -Achse auf die durch  $\tau_{\text{Delam}}^{\text{Gleit}}$  beschriebene Fläche zurückprojiziert. Der Spaltenvektor der Direktorkräfte (3.37) der Schicht  $\mathcal{B}_L$  ist dabei

$$\underline{\mathbf{F}}_{aL}^{*0} = [ -\sigma_L^{\prime i3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 ]^T \otimes \mathbf{e}_i, \quad (4.74)$$

eine Flächenlast in der Referenzfläche der Schicht, vgl. (2.175). Der Spaltenvektor der Direktorkräfte (3.37) der Schicht  $\mathcal{B}_{L-1}$  ist dabei

$$\underline{\mathbf{F}}_{aL-1}^{*H} = [ \sigma_L^{\prime i3} \quad \sigma_L^{\prime i3} H_{L-1} \quad \sigma_L^{\prime i3} (H_{L-1})^2 \quad \dots \quad \sigma_L^{\prime i3} (H_{L-1})^{d_{L-1}} ]^T \otimes \mathbf{e}_i \quad (4.75)$$

eine Flächenlast in der der Referenzfläche gegenüberliegenden Oberfläche der Schicht, vgl. (2.180). War die aktuelle Normalspannung  $\sigma_{\bar{m}L}^{33}$  beim Bruch eine Zugspannung, wird zuerst die Rückprojektion für  $\sigma_{\bar{m}L}^{33} = 0$  durchgeführt, dann für (4.73). Abb. 4.9(a) zeigt eine exemplarische, infolge des Tangentialspannungszustandes vor dem Bruch, als äußere Last eingetragene Tangentialspannung im Augenblick unmittelbar nach dem Bruch, wenn noch kein Schlupf vorhanden ist. Ein derartiger Spannungszustand könnte z. B. auftreten, wenn die dargestellten Schichten eines Einzelelementes senkrecht zur Verbundfläche voneinander abgezogen werden und  $\mathcal{B}_L$  gegenüber  $\mathcal{B}_{L-1}$  eine größere Querdehnung aufweist.

### Zulässige Spannung nach dem Bruch nach weiterem Gleiten.

Zur Bestimmung der in der Kontaktfläche zwischen delaminierten Schichten zu übertragenden Schubspannungen während des Gleitens wird im Rahmen dieser Arbeit ein schlupfabhängiges Reibgesetz verwendet. Dazu wird eine nichtlineare Abhängigkeit der Schubspannung (4.36) von der Bewegungsgröße  $g_{TL}$ , vgl. (4.60), formuliert. Nach dem Versagen des Verbundes durch Erreichen der beim Verbund maximal zulässigen resultierenden Schubspannung  $\tau_{\text{Delam}}$  verliert der Schichtenverbund sofort (gekennzeichnet durch die Schubspannung  $\tau_{\text{Delam}}^{\text{Gleit}}$  in (4.70)) und anschließend zusätzlich mit zunehmender tangentialer Relativverschiebung  $g_{TL}$  der Schichten zueinander die Fähigkeit, Schubspannungen zu übertragen. Diese Abnahme der übertragenen Schubspannungen korrespondiert mit einer zunehmenden Materialschädigung, wenn die Oberflächen aufeinander reiben. Da zur Beschreibung dieses Effektes nicht nur die aktuelle tangentialer Relativverschiebung der Schichten benutzt werden kann, sondern die beim Gleiten erreichte größte tangentialer Relativverschiebung zweier gegenüberliegender Punkte den Grad der Schädigung widerspiegelt, wird ein Tangentialspannungsvektor auf der Grundlage des Wertes  $g_{TL}^{\text{max}}$  formuliert, der den im gesamten Gleitprozess bisher erreichten Größtwert des Betrages (4.64) des Schlupfvektors des jeweiligen Punktes der Schicht  $\mathcal{B}_L$  bezeichnet, vgl. Abb. 4.10.

Abbildung 4.10 zeigt jeweils zweischichtige Verbundsysteme, bei denen auf der linken Seite beide Schichten aus Beton und auf der rechten Seite beide Schichten stellvertretend für Materialien mit

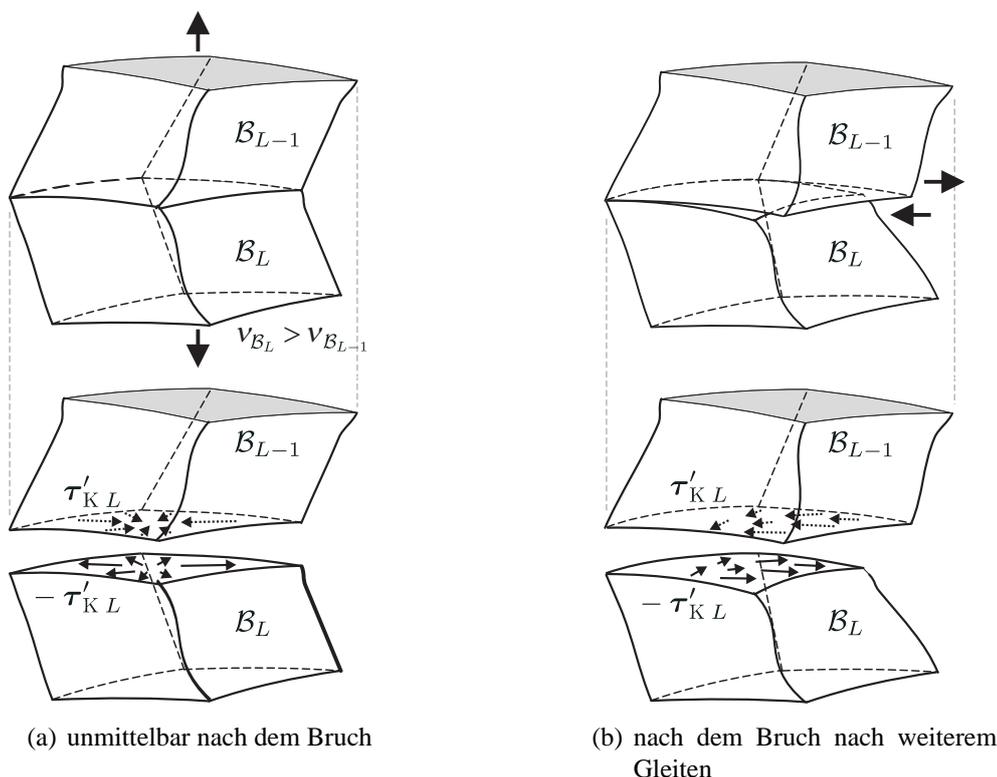


Abbildung 4.9: Verformungszustände nach dem Bruch (oben) mit Freikörperbildern und exemplarischen Schubspannungszuständen (unten)

vergleichsweise glatten Oberflächen z. B. aus Kunststoff bestehen, wobei jeweils die obere von der unteren Schicht abgezogen wird, ähnlich wie im Abzugsversuch in Abschnitt 5.2. Untereinander sind jeweils drei Zustände während dieser Gleitprozesse dargestellt, oben kurz nach Beginn des Abzugs bei beginnender Delamination bei einer Abzugskraft  $p_1$ , in der Mitte bei Erreichen der größten Relativverschiebungen  $g_{TL}^{max}$  der oberen gegenüber der unteren Schicht entlang der Referenzfläche der oberen Schicht, die die Kontaktfläche ist, bei einer Abzugskraft  $p_2$ , unten bei einer Abzugskraft  $p_3 = 0$ , bei der bei angenommener vollständiger Elastizität der oberen Schicht die Relativverschiebung des linken Schichtenendes der oberen Schicht gegenüber dem der unteren Schicht wieder fast in den Ausgangszustand zurückgeht, d. h. fast verschwindet. Die jeweils erreichten Relativverschiebungen  $g_{TL}$  entlang der Referenzfläche der oberen Schicht, die sowohl für den links als auch für den rechts dargestellten Gleitprozess gelten, sind in den Diagrammen unter den Bildern dargestellt, wobei unter den unteren Abbildungen zusätzlich die entlang der Referenzfläche der oberen Schicht während des Gleitprozesses erreichte maximale Relativverschiebung dargestellt ist. Zwischen den Schichten ist schematisch die Veränderung der Delaminations-Rissfläche während der Gleitprozesse dargestellt, wobei die Delaminations-Rissfläche zwischen den Betonschichten anfangs sehr verzahnt ist und nach erfolgter Gleitung weniger verzahnt, d. h. glatter ist, während sie im Vergleich dazu bei Kunststoffen jederzeit relativ glatt sein kann.

Je mehr sich die Körper während des Gleitens gegeneinander verschoben haben, desto mehr soll der Bereich zulässiger Spannungszustände, ausgehend vom Startwert der Tangentialspannungen für das Gleiten in Abb. 4.7, weiter eingeschnürt werden, vgl. Abb. 4.11. Im Fall des Kontakts nimmt die resultierende Tangentialspannung den Betrag

$$\tau_{max}^{Gleit}(g_{TL}^{max}) = \tau_{Delam}^{Gleit} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{\mu} \right) \left( \frac{g_{TL}^{max}}{g_T^\mu} \right)^2 \right)^{-1} \tag{4.76}$$

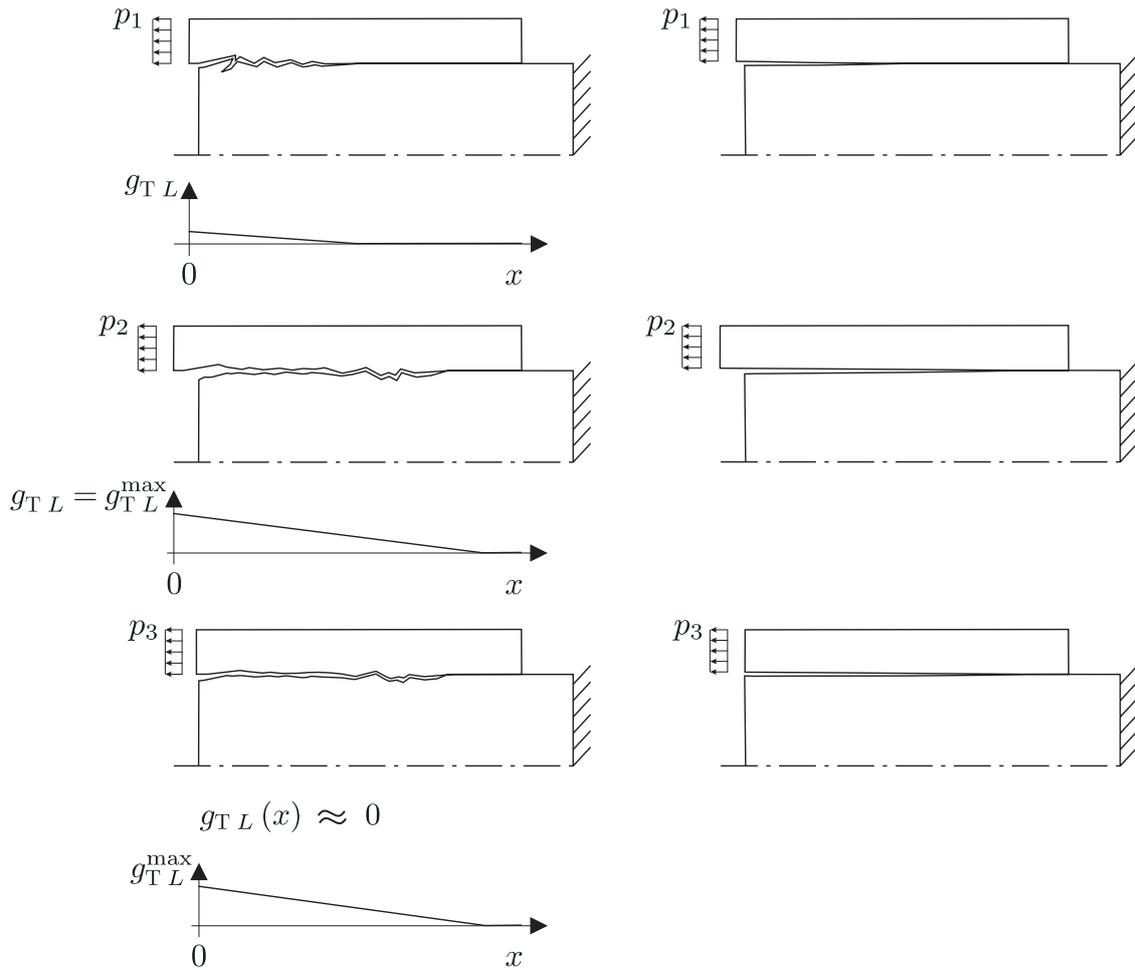


Abbildung 4.10: Gleitprozess zweier Schichten; links: Betone; rechts: Kunststoffe

mit  $\tau_{\text{Delam}}^{\text{Gleit}} (\sigma_{\text{m}L}^{33})$  nach (4.70) an. Während  $\mu_0$  in (4.70) die anfängliche Abminderung der übertragbaren Schubspannung unmittelbar nach dem Verlust des Verbundes darstellt, gibt  $\mu$  ( $0 < \mu < 1$ ) die Abminderung an, wenn  $g_{\text{T}L}^{\text{max}}$  den Wert des Parameters  $g_{\text{T}}^{\mu}$  annimmt. Zum besseren Verständnis der Funktion (4.76) sei auf die Beziehung

$$\tau_{\text{max}}^{\text{Gleit}} (g_{\text{T}L}^{\text{max}} = g_{\text{T}}^{\mu}) = \mu \tau_{\text{Delam}}^{\text{Gleit}}, \quad (4.77)$$

die der Einführung der Parameter  $\mu$  und  $g_{\text{T}}^{\mu}$ , die wiederum durch entsprechende Parameterstudien bei Auswertung von Versuchen gefunden werden können, zu Grunde liegt, und Abb. 4.12 verwiesen. Dieses Reib- bzw. Schubspannungsgesetz hat im Unterschied zur klassischen COULOMBSchen Reibung die Eigenschaft, dass es im Fall von Kontakt auch bei nicht vorhandenem Kontaktdruck wirkt. Die ohne Andruck zwischen den Kontaktpartnern wirkenden Tangentialspannungen tragen dem Vorhandensein von Adhäsion Rechnung. Der Verlauf der übertragenen Schubspannung in Abhängigkeit der tatsächlich erreichten maximalen tangentialen Relativverschiebung der Schichten zueinander ist in Abb. 4.12 dargestellt. Er bewirkt im Druckbereich von  $\sigma_{\text{m}L}^{33}$  ausgehend von der Fläche, die die Menge der Punkte zulässiger Spannungszustände für das anfängliche Gleiten darstellt, vgl. Abb. 4.7, eine weitere Einschnürung des eingeschlossenen Bereiches zulässiger Spannungszustände für fortschreitendes Gleiten. Als äußere Belastung für die Tangentialspannung im Bereich  ${}^e\mathcal{S}_L$  zwischen den Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  wird die Schubspannung

$$\tau'_{\text{KL}} = \frac{\tau_{\text{max}}^{\text{Gleit}}}{|g_{\text{T}L}|} g_{\text{T}L} = \sigma_L^{i3} e_i \quad (4.78)$$

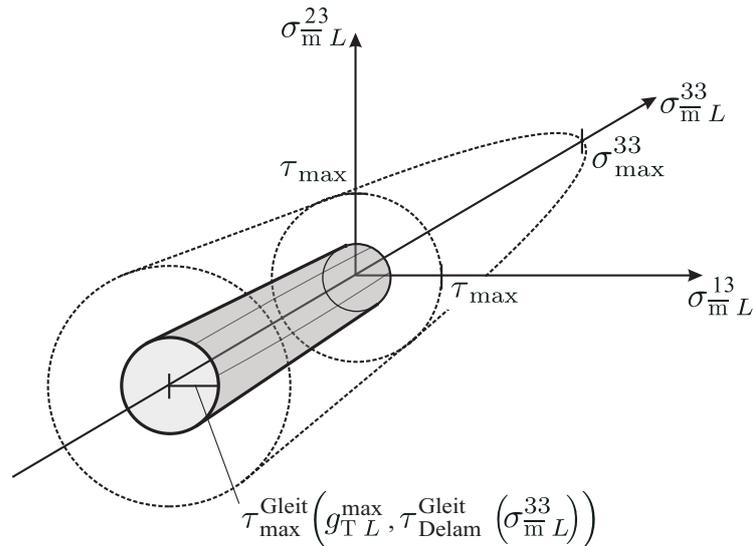


Abbildung 4.11: Bereich zulässiger Spannungszustände während des Gleitens

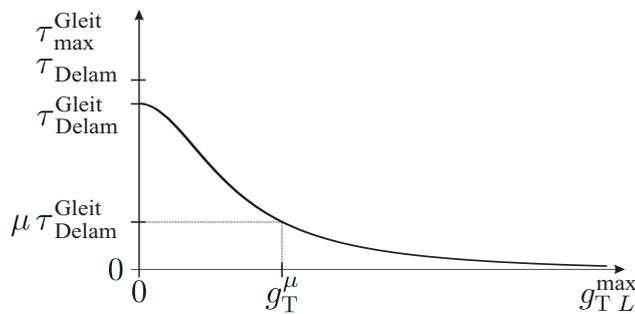


Abbildung 4.12: Abnahme der übertragbaren Tangentialkontaktspannung mit zunehmender max. Tangentialverschiebung

eingetragen. Deren Verteilung auf die Spaltenvektoren der Direktorkräfte der Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  erfolgt wie in (4.74) und (4.75). Abb. 4.9(b) zeigt eine exemplarische, infolge des im aktuellen Zustand aufgetretenen Schlupfes, als äußere Last eingetragene Tangentialspannung nach dem Bruch, wenn Kontakt vorhanden ist. Ein derartiger Spannungszustand könnte z. B. auftreten, wenn die Schichten wie dargestellt gegeneinander verschoben werden. In der nachfolgenden Tabelle sind die Spannungs- und Relativverschiebungszustände zwischen den Schichten zusammengefasst:

	Verbund $g_{TL}^{\max} = 0$	Kontakt/Startwert $g_{TL}^{\max} = 0$	Kontakt/Gleiten $g_{TL}^{\max} > 0$
Schalendickenrichtung $-\infty < \sigma_{mL}^{33} \leq \dots$	$\sigma_{\max}^{33}$	0	0
Tangentialrichtung $\tau_L \leq \dots$	$\tau_{\text{Delam}}(\sigma_{mL}^{33})$	$\tau_{\text{Delam}}^{\text{Gleit}}(\sigma_{mL}^{33})$	$\tau_{\max}^{\text{Gleit}}(g_{TL}^{\max}, \tau_{\text{Delam}}^{\text{Gleit}})$

**Parameter.**

Die in Abschnitt 4.3 für die Versagensfunktion eingeführten Grenzwerte  $\tau_{\max}$  als maximalen Betrag der resultierenden Schubspannungen bei einem Spannungszustand im Verbund, bei dem senkrecht zur Versagensfläche keine Spannung auftritt, und  $\sigma_{\max}^{33}$  als maximalen Betrag der Zugspannungen

senkrecht zur Versagensfläche bei einem Spannungszustand im Verbund, bei dem keine Schubspannung auftritt und der für die Form der Versagensfläche verantwortliche Parameter  $p$ , werden in (4.70) übernommen.

Darüber hinaus sind zur Beschreibung des Verhaltens nach erfolgter Delamination die Parameter  $\mu_0$ , und die Parameter  $\mu$  und  $g_T^\mu$  eingeführt worden. Diese Parameter können wiederum durch entsprechende Studien bei Auswertung der im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 528 „Textile Bewehrungen zur bautechnischen Verstärkung und Instandsetzung“ durchzuführenden Versuche für die in Abschnitt 2.6 beschriebenen Materialien gefunden werden, wobei jedoch zum Einen die derzeitigen Möglichkeiten der Messtechnik zur Erfassung des Schlupfes in Bruchflächen der Versuchskörper die Bestimmung dieser Parameter noch nicht zulassen, vgl. [WEBER 2005]. Zum Anderen können diese Parameter wegen der Verwendung des linearen Materials innerhalb der Schichten und der damit verbundenen nicht zunehmenden Erweichung der Schichten bei Laststeigerung über die Plastizitätsgrenze hinaus nicht richtig skaliert werden, d. h., der dadurch gemachte Fehler ist größer, als der Einfluss der Reibparameter auf den Verschiebungsverlauf entlang des Risses. Deswegen liegen der Wahl der Werte für diese Parameter grobe, sinnvolle Annahmen zu Grunde.

1. Der Abminderungsparameter  $\mu_0$  wurde für die Materialien Beton und Textilbeton im Bereich

$$0,80 \lesssim \mu_0 \lesssim 0,99 \quad (\text{Betone}) \quad (4.79)$$

vorausgesetzt und für Laminatstrukturen aus faserverstärkten Kunststoffen auf Schichten aus Holz oder wiederum aus Kunststoffen im Bereich

$$0,01 \lesssim \mu_0 \lesssim 0,20 \quad (\text{Kunststoffe}) . \quad (4.80)$$

2. Bei festgehaltenem Parameter

$$\mu = 0,2 \quad (4.81)$$

3. wurde für die Materialien Beton und Textilbeton

$$0,0001 m \lesssim g_T^\mu \lesssim 0,001 m \quad (\text{Betone}) \quad (4.82)$$

und für Laminatstrukturen aus faserverstärkten Kunststoffen auf Schichten wie Holz oder anderen Kunststoffen

$$g_T^\mu \rightarrow \infty \quad (\text{Kunststoffe}) \quad (4.83)$$

gewählt. Die Wahl von (4.83) sorgt bei gleichzeitiger Wahl von  $\mu = \mu_0$  für eine annähernd konstante Reibung, die gleitwegunabhängig ist.

In Abb. 4.10 sind, wie bereits erläutert, mögliche Verformungsprozesse zweier aufeinanderliegender Schichten aus Beton (links) und aus Kunststoff (rechts) für eine Be- und eine anschließende Entlastung dargestellt. Nach Entlastung ist der Schlupf in den dargestellten Beispielen jeweils wieder Null. Bei dem Material Beton sind, wie in der Abbildung zu erkennen, durch den Gleitprozess die Rissufer der Bruchflächen geglättet worden, bei aufeinander gleitenden Kunststoffen ist das nicht der Fall. Durch die Wahl der Parameter (4.79) bis (4.83) wird diesem bei Bauteilversuchen zu beobachtenden Effekt Rechnung getragen.

### COULOMBSche Reibung.

Wenn die Kräfte aus dem eingeführten Reibmodell bei weit fortgeschrittener Gleitung nicht mehr maßgebend sind, d. h., wenn  $\tau_{\max}^{\text{Gleit}} < \tau_{\text{Coulomb}}^{\text{Gleit}}$ , und der Berechnungsprozess weiter fortgeführt werden soll, treten an die Stelle von  $\tau_{\max}^{\text{Gleit}}$  die Tangentialkontaktspannungen aus COULOMBScher Reibung

$$\tau_{\text{Coulomb}}^{\text{Gleit}} = \mu_{\text{Coulomb}} \sigma_{\bar{m}L}^{33} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\bar{m}L}^{33} \leq 0, \quad (4.84)$$

die analog zu (4.78) als äußere Last hinzugefügt werden:

$$\tau'_{KL} = \frac{\tau_{\text{Coulomb}}^{\text{Gleit}}}{|\mathbf{g}_{TL}^{I-I}|} \mathbf{g}_{TL}^{I-I} = \sigma_L^{i3} \mathbf{e}_i. \quad (4.85)$$

Deren Verteilung auf die Spaltenvektoren der Direktorkräfte der Schichten  $\mathcal{B}_L$  und  $\mathcal{B}_{L-1}$  für  $L > 1$  erfolgt wie in (4.74) und (4.75). Es ist  $\mathbf{g}_{TL}^{I-I}$  der Schlupfvektor, am betrachteten Punkt von der letzten berechneten Konfiguration zur Momentankonfiguration während des Lösungsprozesses des Gleichungssystems durch das NEWTON-RAPHSON-Verfahren. Wenn die Grenzschubspannung für das Haften (nicht Verbund) unterschritten wird, wird die gegenseitige tangentielle Verschiebung der Kontaktpartner durch das Penalty-Verfahren analog dem Vorgehen für den Normalkontakt nach Abschnitt 4.4.2 unterdrückt.

## 5 Numerische Beispiele

### 5.1 Kragplatte – Einfluss der Reibgesetze

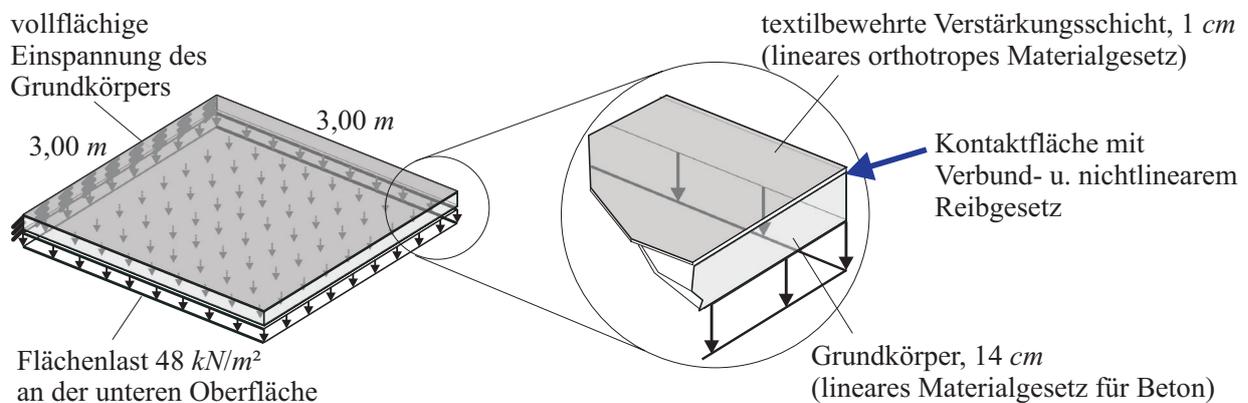


Abbildung 5.1: Verstärkte Kragplatte mit Flächenlast  $48 \text{ kN/m}^2$

Die auf der Kontaktmechanik basierenden Erweiterungen, die in Abschnitt 4 bezüglich der in Abschnitt 3 eingeführten oberflächenorientierten Mehrschichten-Multidirektor-Schalentheorie vorgenommen wurden, werden im Folgenden in einem Anwendungsbeispiel eingesetzt, um das Fortschreiten der Delamination in der Versagensfläche zwischen zwei Schichten zu simulieren. Dazu werden bei ansonsten gleichen Bedingungen unterschiedliche Reibgesetze  $\tau_{\max}^{\text{Gleit}}(g_{TL}^{\max})$ , die auf der Grundlage von (4.76) gebildet werden, in der Versagensfläche eingesetzt. Diese haben im Unterschied zur klassischen COULOMBSchen Reibung alle gemeinsam, dass sie im Fall von Kontakt auch bei nicht vorhandenem Kontaktdruck wirken. Die ohne Andruck zwischen den Kontaktpartnern wirkenden Tangentialspannungen tragen dem Vorhandensein von Adhäsion Rechnung.

Bei dem Anwendungsbeispiel handelt es sich um eine zweischichtige dünne Quadratplatte, s. Abb. 5.1, die an der hinteren Stirnfläche der unteren Schicht (Grundkörper) gelagert ist. Die Freiheitsgrade der oberen Schicht an den Finite-Element-Knoten entlang des eingespannten Plattenrandes verbleiben abgesehen von den drei Verschiebungen, die mit der unteren Schicht gekoppelt sind, im System. Die Platte besteht aus  $3 \times 3$  zweischichtigen Schalenelementen mit je 9 Knoten. Jede der beiden Schichten besitzt drei Direktoren, so dass je Knoten mit 21 Freiheitsgraden gerechnet wird. Für die erste, isotrope Schicht  $\mathcal{B}_1$ , deren Referenzfläche die untere Plattenoberfläche ist, gilt: Die Schichtdicke beträgt  $H_1 = 0,14 \text{ m}$ , der Elastizitätsmodul  $E = 30000 \text{ N/mm}^2$  und die Querdehnzahl  $\nu = 0,17$ . Für die zweite, orthotrope Schicht  $\mathcal{B}_2$ , deren Referenzfläche in der in Abb. 5.1 ausgewiesenen Kontaktfläche liegt, gilt: Die Schichtdicke beträgt  $H_2 = 0,01 \text{ m}$ , die Elastizitätsmoduli  $E_1 = E_3 = 34000 \text{ N/mm}^2$ ,  $E_2 = 36000 \text{ N/mm}^2$ , die Schubmoduli  $G_{13} = G_{23} = 14530 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_{12} = 15380 \text{ N/mm}^2$  und die Querdehnzahlen  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,17$ . Die  $M_{22}$ -Richtung des Materialgesetzes, vgl. (3.30), d. h. die 2-Richtung der Schicht  $\mathcal{B}_2$ , weist in Plattenlängsrichtung. Die dünne Schicht  $\mathcal{B}_2$  besitzt in alle Richtungen höhere Elastizitätsmoduli als Schicht  $\mathcal{B}_1$ .

Als Belastung wird an der Referenzfläche der unteren Schicht  $\mathcal{B}_1$ , also an der unteren Plattenoberfläche, eine konstante nach unten wirkende vertikale Flächenlast schrittweise in der Art vorgegeben, dass die Endbelastung  ${}_0F_{a1} = 48 \text{ kN/m}^2$  beträgt. Das Auftreten erster Delaminationen geschieht in einer Laststufe bei etwa  ${}_0F_{a1} = 24 \text{ kN/m}^2$ . Der Spannungsvektor  $\sigma_{K2}$  der Oberfläche ist entsprechend dem Delaminationskriterium (4.15) die Grundlage für die Entscheidung zwischen Verbund und Delamination. Die darin vorkommenden Parameter wurden  $\sigma_{\max}^{33} = 1,98 \text{ N/mm}^2$  und  $\tau_{\max} = 1,21 \text{ N/mm}^2$  gewählt. Die in der Laststufe mit ersten Delaminationen auftretenden Spannungen  $\sigma_{m2}^{33}$  bleiben in der gesamten Referenzfläche der Verstärkungsschicht deutlich unter der o. g. zulässigen Grenze  $\sigma_{\max}^{33}$ . Entlang der Einspannstelle tritt in dieser Laststufe ein über die gesamte Breite reichender schmaler Streifen mit hohen Schubspannungen auf, was zeigt, dass das Erreichen von  $\sigma_{m2}^{23} = \tau_{\text{Delam}}(\sigma_{m2}^{33})$  mit o. g.  $\tau_{\max}$ , vgl. (4.21), maßgebend wird für das einsetzende Ablösen der oberen von der unteren Schicht an der Kante, an der die untere Schicht eingespannt ist. Bei den im Folgenden vorgestellten drei Berechnungen wurde, nachdem jeweils der Bruch-

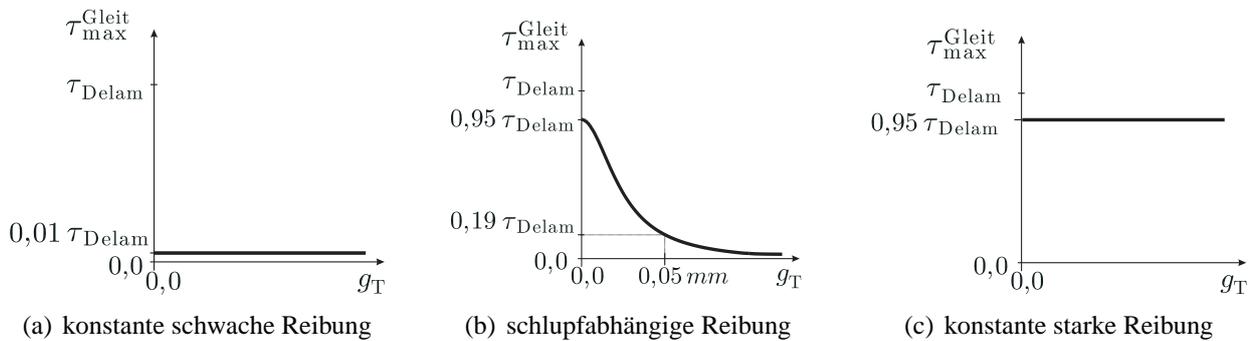
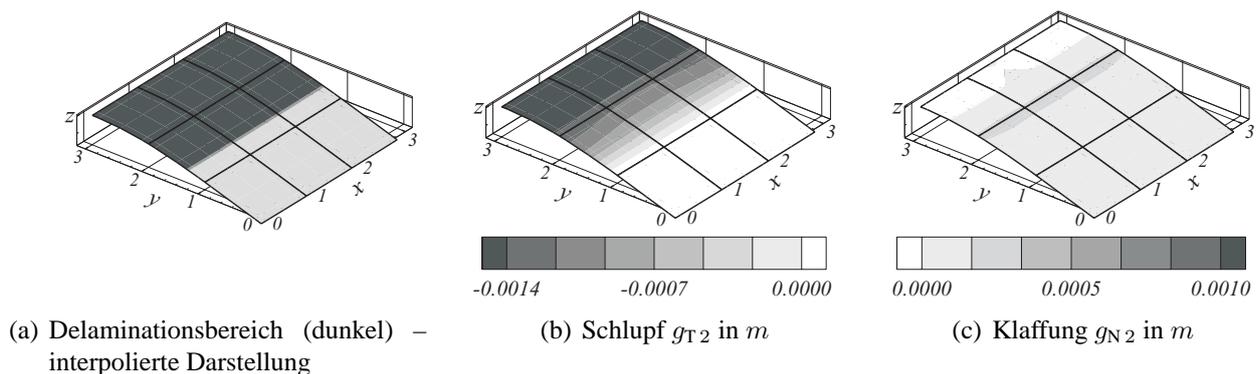
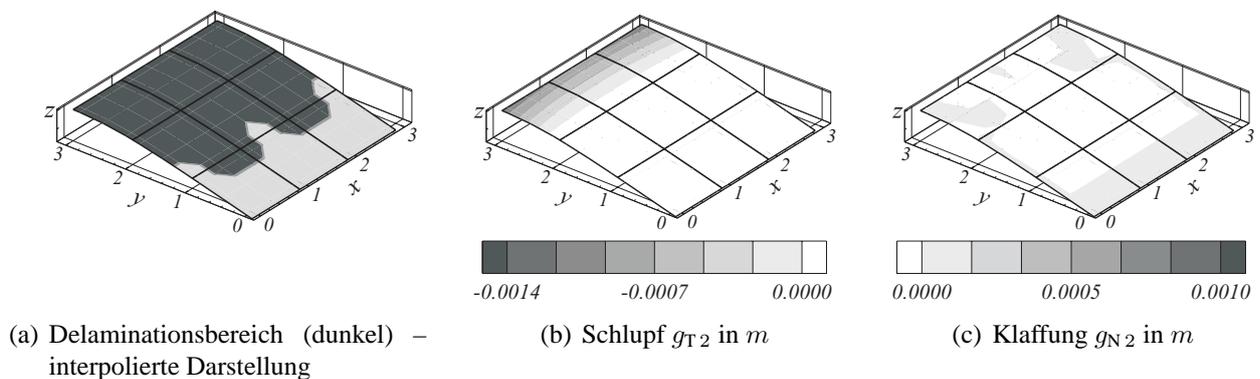


Abbildung 5.2: Berechnungen mit verschiedenen Reibgesetzen

zustand erreicht wurde, das Verhalten nach erfolgter Delamination jeweils entweder durch das Reibgesetz in Abb. 5.2(a), das nahezu keine Übertragung von Tangentialkräften zwischen delaminierten Schichten zulässt, das schlupfabhängige Reibgesetz in Abb. 5.2(b) und das Reibgesetz in Abb. 5.2(c), das - im Fall der Berührung der Schichten - die Übertragung von nahezu so großen Tangentialkräften ermöglicht, wie vor dem Versagen übertragen werden konnten, simuliert. Alle drei Reibgesetze gehen aus (4.15) hervor. Die konstanten Verläufe in Abb. 5.2(a) und Abb. 5.2(c) werden durch die Wahl von  $g_T^\mu \rightarrow \infty$  und  $\mu = \mu_0$  erreicht. In Abb. 5.3 ist der Zustand der Delamination an der Quadratplatte bei der Endbelastung bei Berechnung mit dem Reibgesetz nach Abb. 5.2(a) dargestellt. Der Verlauf des Randes des Delaminationsbereiches weicht hier und im

Abbildung 5.3: Verformungen bei schwacher Reibung, max. Durchbiegung  $6,639\text{ cm}$ 

Weiteren wegen der Darstellung der delaminierten bzw. nicht delaminierten Fläche als einfache Interpolation zwischen nur 9 Stützstellen je Element geringfügig vom Verlauf der Ränder der in Abb. 4.3 definierten Bereiche ab. Die während der Verformung bis zu diesem Zustand in der Kontaktfläche übertragenen Schubspannungen waren zu jeder Zeit  $0,01$ -fach so groß, wie die Schubspannung, die bei der jeweiligen augenblicklichen Normalkontakt-Druckspannung zum Delaminieren führen würde. Die größte Absenkung der Platte an der Vorderkante beträgt dabei  $6,639\text{ cm}$ . Die Delamination ist gleichmäßig bis in Plattenmitte fortgeschritten, vgl. Abb. 5.3(a). Die Tangentialverschiebung der Schichten relativ zueinander, der Schlupf, ist im Auflagerbereich sehr groß, vgl. Abb. 5.3(b). Die obere, dünne Schicht bleibt weitestgehend gleichmäßig auf der unteren Schicht liegen, vgl. Abb. 5.3(c). In Abb. 5.4 ist der Zustand der Delamination an der Quadratplatte

Abbildung 5.4: Verformungen bei schlupfabhängiger Reibung, max. Durchbiegung  $5,810\text{ cm}$ 

bei der Endbelastung bei Berechnung mit dem Reibgesetz nach Abb. 5.2(b) dargestellt. Die während der Verformung bis zu diesem Zustand in der Kontaktfläche übertragenen Schubspannungen nahmen, wenn man einmal gleichbleibenden jeweiligen augenblicklichen Normaldruck annimmt, ab. Sie sind bereits in den Bereichen der Platte, in denen der Schlupf etwa  $0,05\text{ mm}$  beträgt, nur noch  $0,19$ -fach so groß, wie die Schubspannung, die bei der dort vorhandenen augenblicklichen Normalkontakt-Druckspannung zum Delaminieren führen würde. Die größte Absenkung der Platte an der Vorderkante beträgt dabei  $5,810\text{ cm}$ , was eine Verringerung gegenüber der bei der Berechnung mit schwacher Reibung auftretenden bedeutet. Hier werden zwischen den Schichten nach

der Delamination noch verhältnismäßig große Tangentialspannungen übertragen, was am geringen Schlupf in Verbindung mit dem Reibgesetz zu erkennen ist. Damit ist die dünne Schicht noch stärker an der Lastabtragung beteiligt als im System von Abb. 5.3. Die Delamination, vgl. Abb. 5.4(a), ist ähnlich weit, jedoch in einigen Bereichen geringfügig weiter fortgeschritten als bei der Simulation mit konstanter schwacher Reibung, was auch an der relativ groben Vernetzung der Platte liegen kann. Der Schlupf, vgl. Abb. 5.4(b), ist insgesamt etwas geringer als bei der Simulation mit konstanter schwacher Reibung. Die obere, dünne Schicht bleibt wiederum in den meisten Bereichen auf der unteren Schicht liegen, vgl. Abb. 5.3(c), bzw. durchdringt (im Rahmen numerischer Ergebnisse) diese evtl. ein wenig. In Abb. 5.5 ist der Zustand der Delamination an der Quadratplatte bei

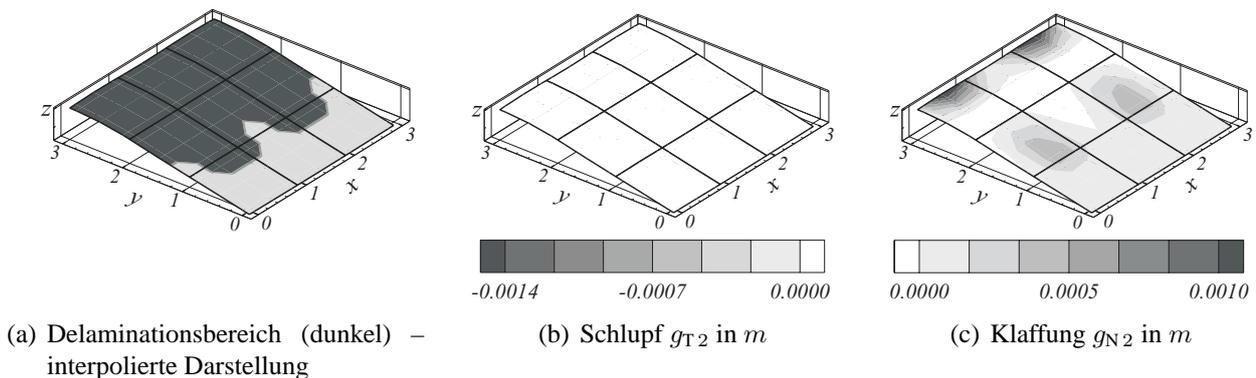


Abbildung 5.5: Verformungen bei starker Reibung, max. Durchbiegung  $5,368\text{ cm}$

der Endbelastung bei Berechnung mit dem Reibgesetz nach Abb. 5.2(c) dargestellt. Die während der Verformung bis zu diesem Zustand in der Kontaktfläche übertragenen Schubspannungen waren zu jeder Zeit  $0,95$ -fach so groß, wie die Schubspannung, die beim jeweiligen augenblicklichen Normaldruck zum Delaminieren führen würde. Die größte Absenkung der Platte an der Vorderkante beträgt dabei  $5,368\text{ cm}$ , was eine weitere Verringerung gegenüber der bei der Berechnung mit schlupfabhängiger Reibung auftretenden bedeutet. Zum Vergleich: Die größte Absenkung der Platte an der Vorderkante beträgt, wenn der Verbund erhalten bleibt,  $5,364\text{ cm}$ . Die Delamination, vgl. Abb. 5.5(a), ist genauso weit fortgeschritten wie bei der Simulation mit schlupfabhängiger Reibung. Der Schlupf, vgl. Abb. 5.5(b), ist wegen der großen Schubspannung fast Null. Ein Phänomen, welches jetzt hinzukommt, ist die infolge von Reibung zwischen den Schichten im Auflagerbereich auftretende Aufkrepelung der dünnen Schicht  $\mathcal{B}_2$ , vgl. Abb. 5.5(c). Das ist dadurch zu erklären, dass bezogen auf die neutrale Faser der dünnen Schicht in Folge der Reibungskräfte, die auf die Oberfläche der dünnen Schicht wirken, ein sogenanntes Krepelmoment in positive  $x$ -Richtung wirkt, das lokal eine besonders große Biegung der dünnen Schicht bewirkt. Ein gleich großes Moment in die selbe Richtung wirkt in Folge der Reibungskräfte bezüglich der neutralen Faser der dicken Schicht  $\mathcal{B}_1$  und verursacht eine nicht so deutlich sichtbare zusätzliche Biegung der Schicht  $\mathcal{B}_1$ .

Die Berechnungen und Abbildungen zeigen u. a., dass die Möglichkeit besteht, die für die unterschiedlichen Reibgesetze verwendeten Werte für die in Abschnitt 4.4.3 eingeführten Parameter so zu bestimmen, dass Bauteilversuche simuliert werden können, wenn die messtechnischen Voraussetzungen insbesondere zur Messung - z. B. entlang der Ränder - des Schlupfes und der Klaffung gegeben sind.

### 5.2 Laschenabzugsversuch – Parameterskalierung

Für die im Abschnitt 4.3 für ein Delaminationskriterium zwischen Schichten allgemein eingeführten Parameter  $\sigma_{\max}^{33}$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $p$  und für die im Abschnitt 4.4.3 für die Beschreibung des Verhaltens nach erfolgter Delamination zwischen Schichten allgemein eingeführten Parameter  $\mu_0$ ,  $\mu$ ,  $g_T^\mu$  werden durch den im nachfolgenden Abschnitt beschriebenen Bauteilversuch Zahlenwerte gefunden, die im Rahmen der Möglichkeiten des entwickelten Mehrschichtenmodells eine realitätsnahe Finite-Element-Simulation dieses Versuches ermöglichen. Dabei wurden für  $p$  und  $\mu_0$  sinnvolle

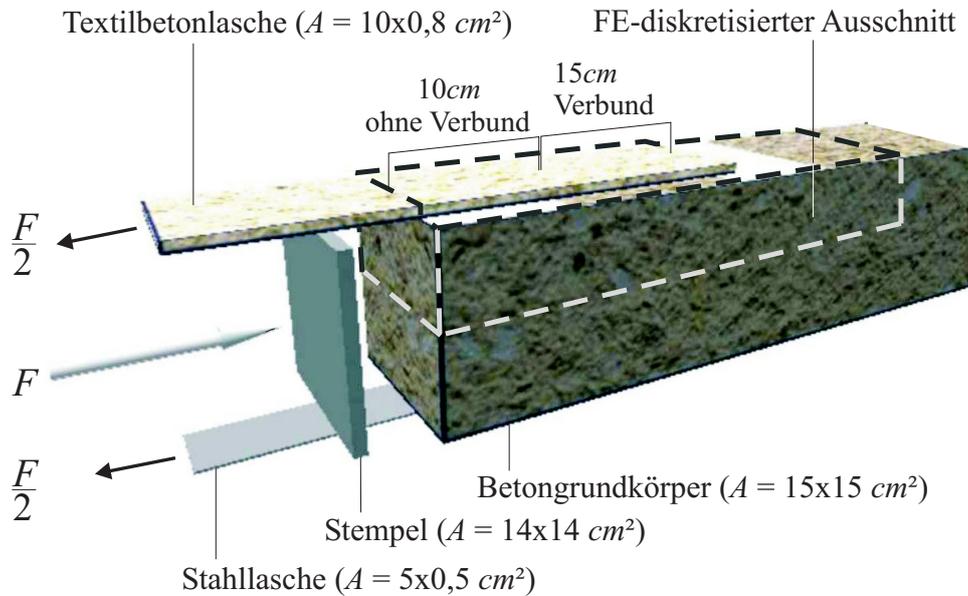


Abbildung 5.6: Versuchsanordnung des Laschenabzugsversuchs aus SFB 528, Teilprojekt C1

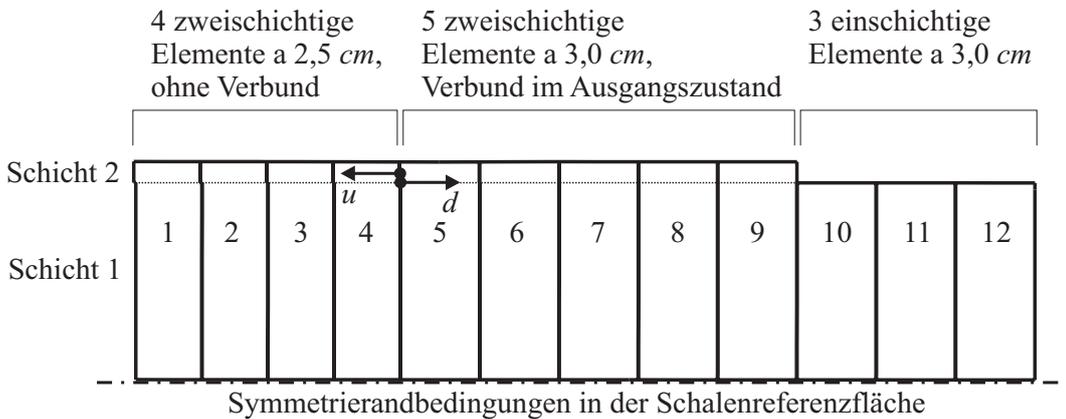
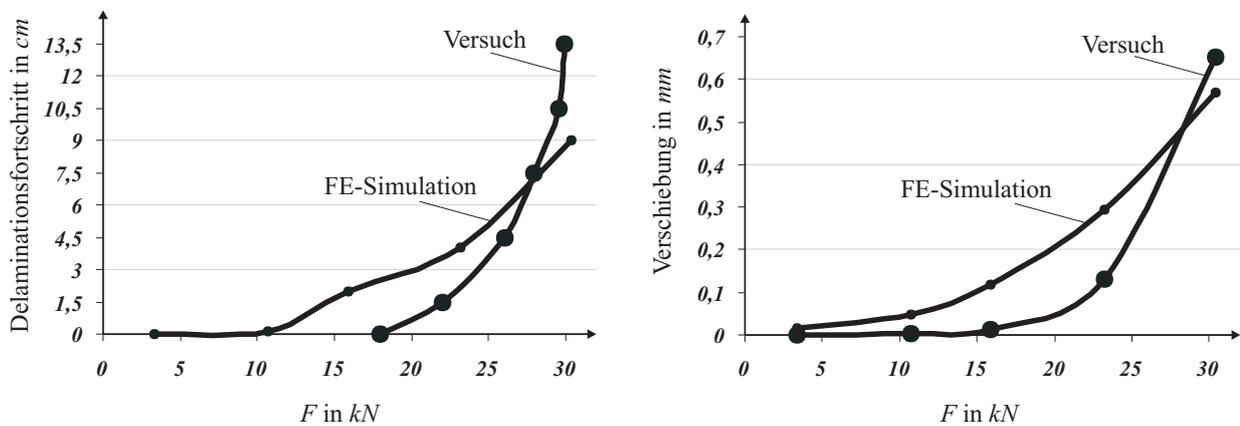


Abbildung 5.7: Elementierung (Längsschnitt im FE-diskretisierten Ausschnitt)

Annahmen getroffen,  $\mu$  wurde als der zu  $g_T^\mu$  korrespondierende Parameter festgehalten. Der Parameter  $\sigma_{\max}^{33}$  wurde aus einem anderen Bauteilversuch, bei dem eine Textilbeton-Verstärkungsschicht senkrecht zur Verbundfläche von einem Betongrundkörper aus Beton der Klasse B25 abgezogen wurde, unverändert übernommen. Aus der dabei im Mittel über mehrere Serien für das im Folgenden verwendete textile Gelege maximal übertragenen Kraft wurde der o. g. Spannungswert ermittelt. Es verbleiben die Parameter  $\tau_{\max}$  und  $g_T^\mu$ , die durch Probieren so eingestellt wurden, dass der Prozess des Fortschreitens der Delamination mit steigender Last und die dabei auftretenden

maßgebenden Verschiebungen annähernd simuliert werden konnten.

In Abb. 5.6 ist die im Sonderforschungsbereich 528, Teilprojekt C1 gewählte Versuchsanordnung des Abzugs einer textilbewehrten Betonlasche von einem Betonprisma der Festigkeitsklasse B25 dargestellt. Der in diesem Bild als FE-diskretisierter Ausschnitt gekennzeichnete Bereich des Versuchskörpers wurde für eine Simulation des Belastungsprozesses durch die entwickelten Mehrschichtenelemente mit verschieblichen Schichten durch insgesamt 72 finite Schalenelemente, davon jeweils 36 ein- und zweischichtige, unter Ausnutzung des hinsichtlich des Verschiebungsverhaltens symmetrischen Versuchsaufbaus diskretisiert. Das Kontinuum innerhalb jeder Schicht wurde durch einen 3-Direktor-Ansatz approximiert. In Abb. 5.7 ist ein Längsschnitt durch den diskretisierten Bereich dargestellt. Die Elemente 1 bis 4 des Schnittes haben bereits im Ausgangszustand keinen Verbund zwischen den 2 Schichten und werden später bei der Simulation des Verhaltens nach erfolgter Delamination hinsichtlich des auf die Erfassung von Adhäsion ausgelegten Reibgesetzes nicht berücksichtigt. Die Elemente 5 bis 9 des Schnittes repräsentieren durch die Schichtenreferenzfläche ihrer jeweils 2. Schichten den sogenannten Verbundbereich. Für den Betongrundkörper und die Lasche ist entsprechend der in Abschnitt 2.6 vorgestellten Materialmodelle jeweils ein lineares Material zur Anwendung gekommen. Dabei wurde für den durch ein Textil-



(a) Delaminationsfortschritt  $d$  in Abhängigkeit von der Kraft

(b) größte Verschiebungen  $u$  der Lasche im Verbundbereich des Ausgangszustandes

Abbildung 5.8: FE-Simulation des Laschenabzugsversuchs

gelege bewehrten Feinbeton der Lasche ein orthotropes Material entsprechend den für den linear elastischen Bereich entwickelten Homogenisierungen mit den Konstanten  $E_1 = 28858 \text{ N/mm}^2$ ,  $E_2 = 19242 \text{ N/mm}^2$ ,  $E_3 = 27390 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_{12} = 11786 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_{13} = 11972 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_{23} = 11714 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu_{12} = 0,22$ ,  $\nu_{23} = 0,12$ ,  $\nu_{31} = 0,18$  für Elastizitätsmoduli, Schubmoduli und Querdehnungen verwendet. Zur Berücksichtigung der durch die Schrägrisse, die sich während des Belastungsprozesses innerhalb der Schicht der Lasche einstellen, vgl. dazu Abb. 4.2 im Abschnitt 4.1, stark veränderten Materialeigenschaften wurden alle Elastizitäts- und Schubmoduli des linear elastischen Materials von Beginn an auf den 0,2-fachen Wert abgemindert, um die im Versuch ermittelten Verschiebungen der Lasche in der Berechnung annähernd nachvollziehen zu können. Das dem dargestellten Versuch zugrunde gelegte Gelege besteht aus 4 Lagen Einzelgelege mit der Bezeichnung NWM3-020-00, das wiederum jeweils aus NEG-ARG620-01-Fasern im Abstand von  $3,6 \text{ mm}$  in Belastungsrichtung und NEG-ARG310-01-Fasern im Abstand von  $7,2 \text{ mm}$  senkrecht zur Belastungsrichtung besteht. Für den Betongrundkörper wurde ein isotropes Material mit  $E = 25000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,2$  verwendet. Folgende Werte nehmen die durch das Verbund- und Reibgesetz eingeführten Parameter an, damit der in Abb. 5.8 dargestellte Verlauf der Delaminationslänge und der Verschiebungen ausreichend gut angenähert ist: Für die Zugfestigkeit senkrecht

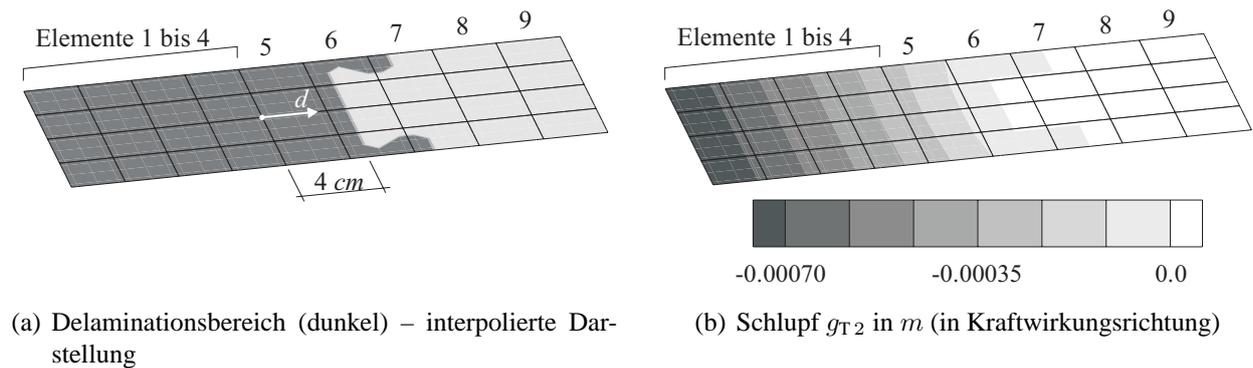


Abbildung 5.9: FE-Simulation des Laschenabzugsversuchs (Berührungsfläche von Lasche und Grundkörper im FE-diskretisierten Ausschnitt bei  $F = 23,2 \text{ kN}$ )

zur Verbundfläche wurde  $\sigma_{33}^{\max} = 1,98 \text{ N/mm}^2$  für das angegebene Material als Messergebnis aus entsprechenden Versuchen, vgl. [CURBACH, ORTLEPP 2003], direkt übernommen. Werte für die weiteren Parameter  $\tau^{\max} = 6,00 \text{ N/mm}^2$ ;  $p = 2$ ;  $\mu_0 = 0,95$ ;  $\mu = 0,2$ ;  $g_T^{\mu} = 0,2 \text{ mm}$  wurden so abgestimmt, dass die Kurven für FE-Simulation und Versuch in Abb. 5.8(b) einigermaßen nahe beieinander liegen. In Abb. 5.8(a) ist in Abhängigkeit von der in die Lasche eingetragenen Last  $F$  die über die inneren beiden der vier in Laschenbreite nebeneinander liegenden Elemente gemittelte Länge  $d$  des Delaminationsbereiches (nach rechts positiv angegeben) des in Abb. 5.6 bzw. Abb. 5.7 für den Ausgangszustand ausgewiesenen Verbundbereiches den gemittelten Ergebnissen aus den Versuchen gegenübergestellt. Eine erste Ablösung beginnend an der Kante zwischen dem 4. und 5. Element, vgl. Abb. 5.7, tritt in der Simulation zwischen  $10,7 \text{ kN}$  und  $15,9 \text{ kN}$  erwartungsgemäß am 5. Element ein. Bei weiterer Laststeigerung bis zur größten im Versuch eingetragenen Last reicht der Bereich der Ablösung der Lasche vom Grundkörper in der Simulation bis zur Kante des 8. Elementes heran. Zur gleichen Zeit stellen sich die Verschiebungen  $u$  der Lasche an der Kante zwischen dem 4. und 5. Element in der Mitte der Laschenbreite wie in Abb. 5.8(b) dargestellt ein, die nach links positiv angegeben werden. Im Versuch sind diese an der Laschenoberseite gemessen, in der Simulation sind die der Schichtenreferenzfläche der 2. Schicht angegeben, wobei diesbezüglich ein vernachlässigbarer Fehler unterstellt wird. Eine deutlich bessere Approximation der in Abb. 5.8 dargestellten Verläufe der in den Versuchen gemessenen Größen ist bei Einsatz linearer Materialien innerhalb der Schichten nicht zu erreichen, da die inelastischen Anteile der Verformung in der Verstärkungsschicht nicht separat erfassbar sind. Es werden durch das Modell lediglich Gesetzmäßigkeiten in der Fuge zwischen den Schichten berücksichtigt, die für eine verbesserte Simulation mit anderweitig entwickelten Versagensmodellen für Kontinua gekoppelt werden müssten.

In Abb. 5.9 und Abb. 5.10 wird der Zustand des Bauteils während der Laststeigerung in der Simulation bei fortgeschrittener Delamination beispielhaft bei einer Last  $F = 23,2 \text{ kN}$  charakterisiert. In Abb. 5.9(a) ist der bei der ausgewiesenen Laststufe vorhandene Zustand der Delamination in der Berührungsfläche von Lasche und Grundkörper im FE-diskretisierten Ausschnitt durch dunkle Einfärbung dargestellt. Die Fläche in den von links ersten vier Elementreihen ist bereits im Ausgangszustand ohne Verbund und wird hier begrifflich dem sogenannten Delaminationsbereich zugeschlagen. Die Abbildung zeigt, dass die Ablösung an den Laschenrändern weiter vorangeschritten ist, als im inneren Bereich. In Abb. 5.9(b) ist der in diesem Zustand in der Berührungsfläche aufgetretene Schlupf, der nicht mit der im Diagramm in Abb. 5.8(b) bei  $F = 23,2 \text{ kN}$  dargestellten Absolutverschiebung verwechselt werden darf, dargestellt. Abb. 5.10 zeigt die mit der FE-Software IDEAS berechnete Spannungskomponente in Kraftwirkungsrichtung des zu die-

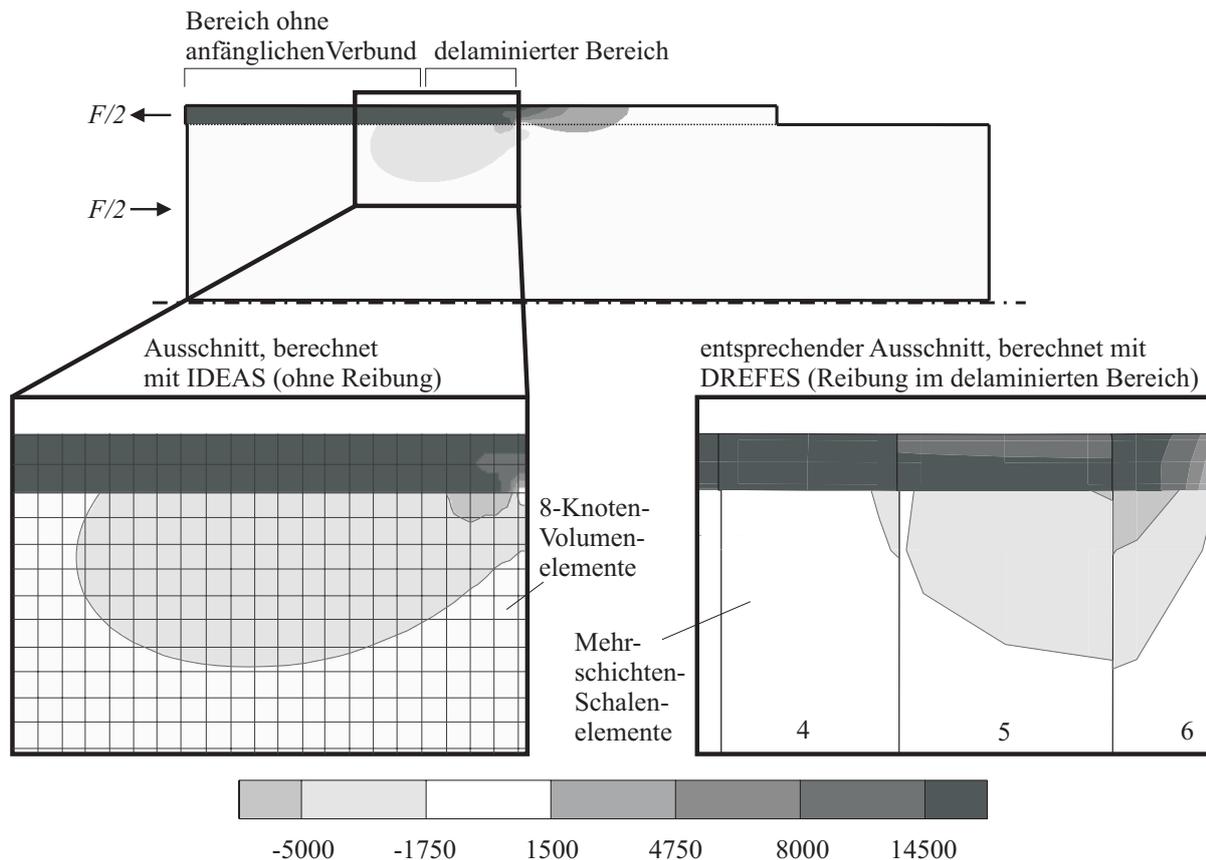


Abbildung 5.10: Normalspannungen  $\sigma_{mL}^{11}$  in  $kN/m^2$  (in Kraftwirkungsrichtung bei  $F = 23,2 kN$ ) im Längsschnitt; Vergleich von mit IDEAS und DREFES erzeugten Ausschnitten

ser Laststufe gehörenden Spannungszustandes im Längsschnitt, der in der Mitte der Laschenbreite geführt wurde, mit einem Ausschnitt. Der gleiche Ausschnitt dieser Spannungsponente ist für die Berechnung mit den in das FE-Programmpaket DREFES implementierten Mehrschichten-Schalenelementen dargestellt, bei dem entsprechend der Elementnummerierung der Abb. 5.7 die Delamination bis in den linken Bereich des 6. Elementes fortgeschritten ist. Es ist in der Abbildung zu erkennen, dass die in die Lasche eingeleitete Zugkraft bis zur Kante zwischen dem 4. und 5. Element gleichmäßig übertragen wird. Im 5. Element ist die Wirkung der Adhäsion, also einer Restfestigkeit in der Berührungsfläche der Schichten zu erkennen, da die Zugspannung  $\sigma_{m2}^{11}$  in der Lasche dort abnimmt und in der darunter liegenden Schicht die Druckspannung  $\sigma_{m1}^{11}$  lokal zunimmt. Der Vergleich dieser durch die Mehrschichten-Schalenelemente erhaltenen Spannungsverteilung, insbesondere in der mittleren Druckzone im delaminierten Bereich und an der Druckspitze am Rand der Delaminationszone, mit der mittels Volumenelementen durch IDEAS erzeugten Lösung, vgl. auch [WEBER 2005], bei der deutlich feiner vernetzt wurde, zeigt mit guter Übereinstimmung die grundsätzliche Eignung der Mehrschichten-Schalenelemente auch für solche Problemstellungen.

### 5.3 Platte mit kreisförmiger Anfangsdelamination – Delaminationsfortschritt

#### 5.3.1 Platte aus kohlefaserverstärktem Kunststoff

Im folgenden Abschnitt wird hinsichtlich der Vergrößerung eines bereits delaminierten Bereiches bei steigender Last ein quantitativer Vergleich mit einem in der Literatur zu findenden Beispiel durchgeführt. Bei diesem Beispiel handelt es sich um eine Platte, bestehend aus 16 Schichten kohlefaserverstärkten Kunststoffs AS/3501 mit der Schichtdicke  $H_L = 0,12 mm$ , wie es in

[SPRENGER 2000] und [WAGNER 2002] vorgestellt wurde, vgl. Abb. 5.11. Die Materialdaten für das orthotrope Material einer Schicht, die Grenzspannungen für die Versagensfläche und die Belastung sind dort wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 135000 \text{ N/mm}^2, & G_{12} &= 5150 \text{ N/mm}^2, & \nu_{12} &= 0,317, \\
 E_{22} &= 8500 \text{ N/mm}^2, & G_{23} &= 5150 \text{ N/mm}^2, & \nu_{23} &= 0,317, \\
 E_{33} &= 8500 \text{ N/mm}^2, & G_{31} &= 5150 \text{ N/mm}^2, & \nu_{13} &= 0,317, \\
 \sigma_{\max}^{33} &= 51,7 \text{ N/mm}^2, & \tau_{\max} &= 91,0 \text{ N/mm}^2, & F &= 30 \text{ N/mm},
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

wobei die erste Materialhaupttrichtung ( $E_{11}$ ) der Faserrichtung entspricht. Für den die Form der Versagensfläche in Gl. (4.21) mitbestimmenden Parameter wurde  $p = 2$  angenommen. Darüber hinaus wurden zur Beschreibung des Verhaltens nach Delamination in den Bereichen, die am Anfang miteinander verbunden sind, für die Parameter des Reibgesetzes folgende Werte angenommen:  $\mu_0 = 0,6$ ;  $\mu = 0,2$ ;  $g_T^{\mu} = 0,05 \text{ mm}$ . Im Bereich der kreisförmigen Anfangsdelamination wurden die letztgenannten Werte so klein gewählt, dass nahezu keine Reibkräfte übertragen werden. Folgende Winkel schließen die erste Materialhaupttrichtung der Schichten 1 bis 8 mit der Systemachse  $x_1$  der Reihe nach ein:  $0^\circ/0^\circ/45^\circ/0^\circ/0^\circ/ -45^\circ/0^\circ/90^\circ$ . Die Schichten 16 bis 9, absteigend, haben die gleiche Reihenfolge der Winkel, so dass sich im nicht delaminierten Bereich bezüglich der Mittelfläche eine Symmetrie ergibt. Zwischen den Schichten 14 und 15 ist im gekennzeichneten Bereich bereits vor der Belastung eine kreisförmige Delamination vorhanden. Für

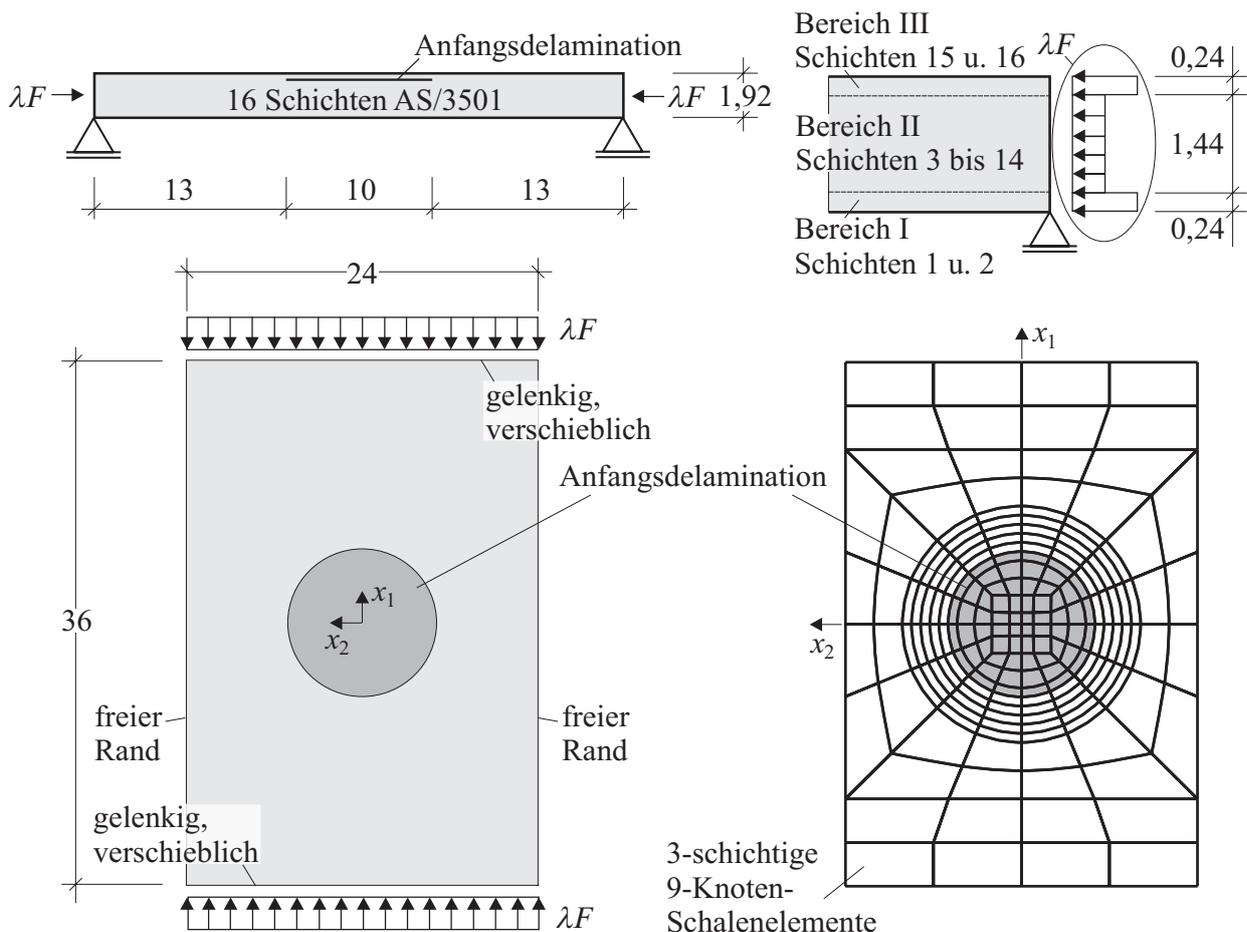


Abbildung 5.11: Platte mit kreisförmiger Anfangsdelamination: statisches System und Ver-  
netzung, Maße in  $mm$

die numerische Simulation des Belastungsprozesses durch die Last  $F$  wurden die physikalischen Schichten 1 und 2, 3 bis 14 sowie 15 und 16 zu den drei Bereichen I bis III mit jeweils einem homogenisierten orthotropen Material zusammengefasst. Das System ist mit dreischichtigen Schalelementen, wie in Abb. 5.11 rechts unten dargestellt, vernetzt, so dass die Elementschichten I und III jeweils eine Dicke von  $0,24\text{ mm}$  und Elementschicht II von  $1,44\text{ mm}$  haben, siehe Abb. 5.11 rechts oben. Die Linienlast  $F$  entlang der Plattenränder wird im Rahmen einer nichtlinearen Berechnung durch den Lastparameter  $\lambda$  gesteuert. Sie ist in Dickenrichtung der Platte entsprechend der Längssteifigkeiten der Bereiche (Elementschichten) I bis III in  $x_1$ -Richtung und der Schichtdicken verteilt. Abbildung 5.12 zeigt den Rand des sich vergrößernden Delaminationsbereiches bei Wirkung der Last  $\lambda F$  für verschiedene Lastparameter  $\lambda$  in einem Viertel der Platte. Zum Vergleich sind die Berechnungsergebnisse aus [WAGNER 2002] durch gestrichelte Linien dargestellt. Durch das Raster in der Abbildung werden die Elementgrenzen markiert. Da die Information über die in einem Schalelement ggf. erfolgte Delamination wegen der damit verbundenen kinematischen Entkopplung an den Knotenpunkten vorliegen muss, ist ein kleiner Teil aller Elemente, zu denen ein und der selbe Knotenpunkt gehört, ebenfalls delaminiert. Streng genommen orientiert sich der Rand des Delaminationsbereiches also nicht an den Elementgrenzen, sondern befindet sich ca.  $1/3$  der jeweiligen Elementlängen der angrenzenden Elemente außerhalb des gekennzeichneten Delaminationsbereiches. Der Beginn der Delamination bzw. die beginnende teilweise Schädigung, die in [WAGNER 2002] an der Stelle  $(x_1 = 5\text{ mm}, x_2 = 0\text{ mm})$  angegeben ist, wird durch das hier vorgestellte Modell nicht erfasst. Die bei Steigerung der Belastung sich entwickelnde Vergrößerung des Delaminationsbereiches hin zu einer ovalen Form mit der größeren Ausdehnung in  $x_2$ -Richtung kann jedoch gut nachvollzogen werden.

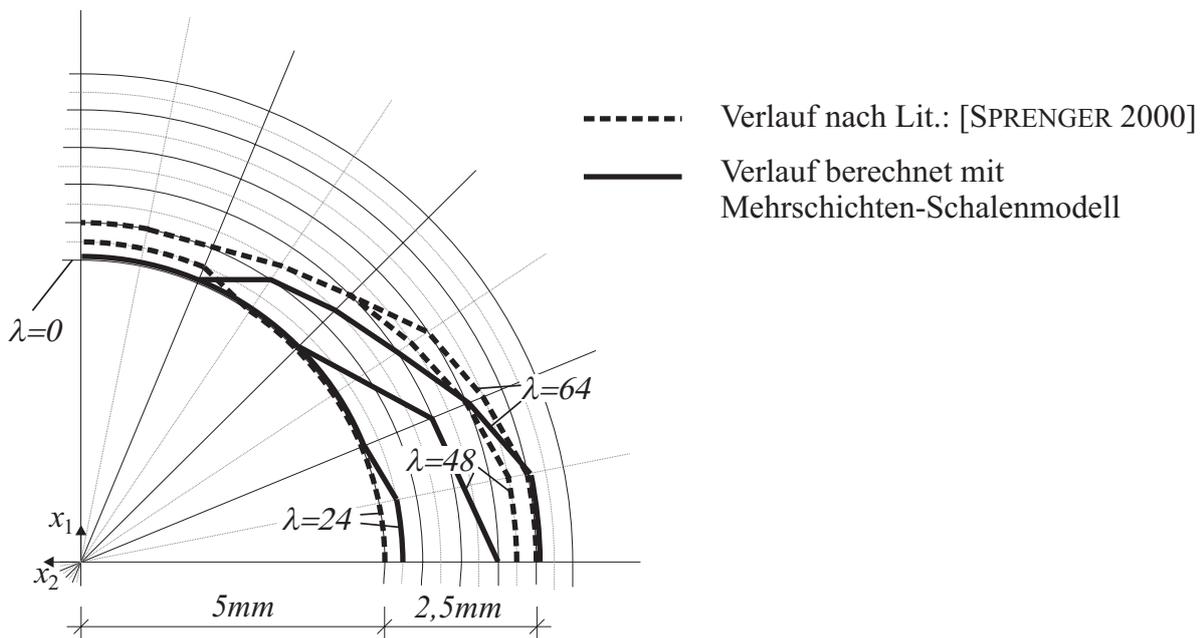


Abbildung 5.12: Vergrößerung des delaminierten Bereiches der Platte aus kohlefaserverstärktem Kunststoff bei zunehmender Drucklast

### 5.3.2 Platte aus Beton und einer Verstärkungsschicht aus Textilbeton

In einem zum vorherigen ähnlich angelegten Beispiel soll die Anwendung auf eine textilbewehrte Verstärkungsschicht gezeigt werden. Die hier von Anfang an nur zweischichtige Platte

( $36\text{ cm} \times 24\text{ cm}$ ) ist in der Aufsicht und der Vernetzung proportional zu der in Abb. 5.11. Die Lagerung erfolgt analog der der Platte des vorherigen Beispiels. Als Belastung wurde analog dem vorherigen Beispiel eine Linienlast  $\lambda F$  eingetragen (hier in Dickenrichtung der Schale entsprechend der Schichtdicken verteilt) und zusätzlich die Flächenlast  $\lambda f$ , vgl. Abb. 5.13 rechts, mit  $f = 5\text{ N/cm}^2$ . Die kreisförmige Anfangsdelamination mit einem Durchmesser von  $10\text{ cm}$  befindet sich zwischen

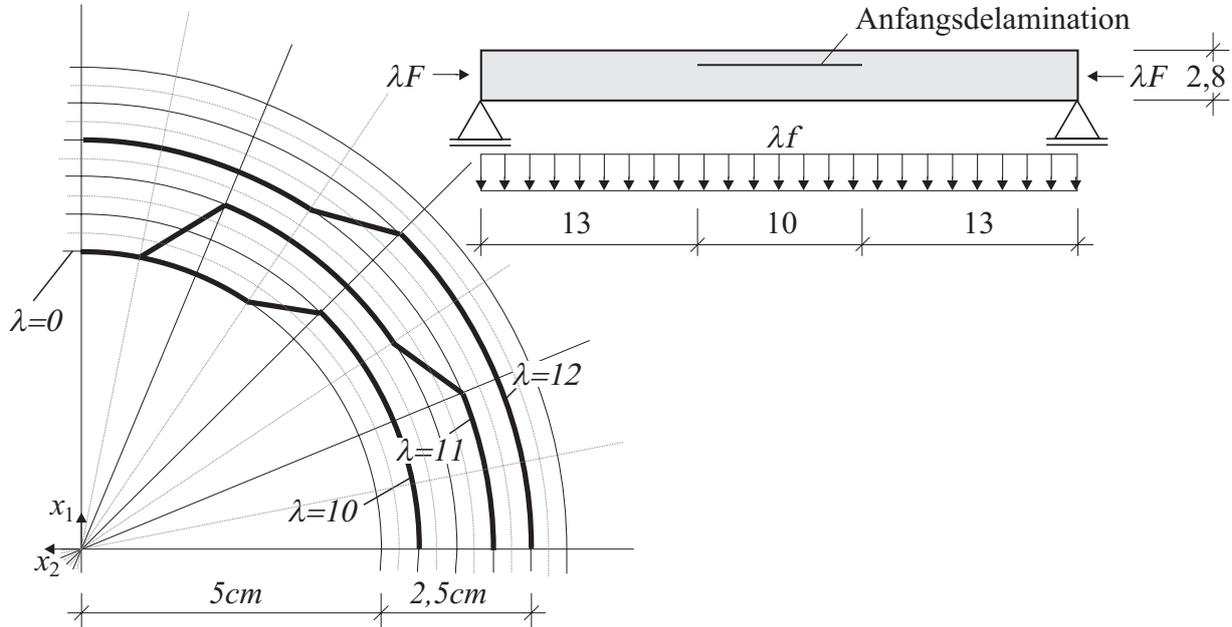


Abbildung 5.13: Links: Vergrößerung des delaminierten Bereiches der Platte aus Textilbeton bei zunehmender Längsbeanspruchung und Biegung; rechts: Platte mit kreisförmiger Anfangsdelamination, statisches System, Maße in  $\text{cm}$

den beiden Schichten. Schicht 1 ist  $2,0\text{ cm}$  dick und besteht aus einem isotropen Material mit dem Elastizitätsmodul  $E = 25000\text{ N/mm}^2$  und einer Querdehnzahl  $\nu = 0,2$ , was ungerissenem Beton entspricht. Schicht 2 ist  $0,8\text{ cm}$  dick und besteht aus Textilbeton. Damit existiert hier im Gegensatz zum vorherigen Beispiel auch in den nicht delaminierten Bereichen keine Symmetrie zur Mittelfläche. In dieser Schicht beträgt die Hauptbewehrung ( $x_1$ -Richtung)  $5$  Volumenprozent, die Querbewehrung  $1$  Volumenprozent. Eine Homogenisierung, vgl. [ZASTRAU et al. 2006], liefert für eine isotrope Feinbetonmatrix ( $E_m = 30000\text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,2$ ) mit 2 Bewehrungsrichtungen ( $f_1 = 0,05$ ,  $f_2 = 0,01$ ) aus Glasrovings ( $E_r = 76000\text{ N/mm}^2$ ) ein orthotropes Material mit den folgenden neun unabhängigen Ingenieurkonstanten:

$$\begin{aligned} E_{11} &= 31426\text{ N/mm}^2, & G_{12} &= 11520\text{ N/mm}^2, & \nu_{12} &= 0,191, \\ E_{22} &= 26535\text{ N/mm}^2, & G_{23} &= 11413\text{ N/mm}^2, & \nu_{23} &= 0,221, \\ E_{33} &= 25429\text{ N/mm}^2, & G_{31} &= 11498\text{ N/mm}^2, & \nu_{31} &= 0,166. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Für die Parameter des Versagenskriteriums nach Gl. (4.21) sind folgende Werte angenommen:  $\sigma_{\max}^{33} = 2,0\text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{\max} = 6,0\text{ N/mm}^2$ ,  $p = 2,0$ . Für die einfache Last wurde  $F = 300\text{ N/cm}$  verwendet. Zur Beschreibung des Verhaltens nach Delamination wurden in den Bereichen, die am Anfang miteinander verbunden sind, für die Parameter des Reibgesetzes folgende Werte angenommen:  $\mu_0 = 0,95$ ;  $\mu = 0,2$ ;  $g_T^\mu = 0,2\text{ mm}$ . Im Bereich der kreisförmigen Anfangsdelamination wurden die letztgenannten Werte so klein gewählt, dass nahezu keine Reibkräfte übertragen werden. In Abb. 5.13 links ist wiederum der beim Anwachsen der Delamination

den Delaminationsbereich begrenzende Rand bei entsprechendem Lastparameter in einem Viertel der Platte dargestellt. Das Anwachsen des anfänglichen Delaminationsbereiches beginnt bei ca.  $\lambda F = 10 \cdot 300 \text{ N/cm} = 3000 \text{ N/cm}$ ,  $\lambda f = 10 \cdot 5 \text{ N/cm}^2 = 50 \text{ N/cm}^2$  in der Umgebung der Stelle ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 5 \text{ cm}$ ). Im Vergleich zum vorherigen Beispiel, bei dem innerhalb der äußeren Elementschichten die Steifigkeitsunterschiede in den Materialhaupttrichtungen des orthotropen Materials deutlich größer sind, bildet sich hier bei weiterer Laststeigerung nicht die ovale Form des Delaminationsbereiches aus.

#### 5.4 Kuppel des Krümmeler Wasserturms – Anwendung

##### Allgemeines.

Für das in Abschnitt 4.3 eingeführte Delaminationskriterium und für die in Abschnitt 4.4.3 vorgestellte Beschreibung des Verhaltens nach erfolgter Delamination zwischen Schichten wurden in



Abbildung 5.14: Krümmeler Wasserturm

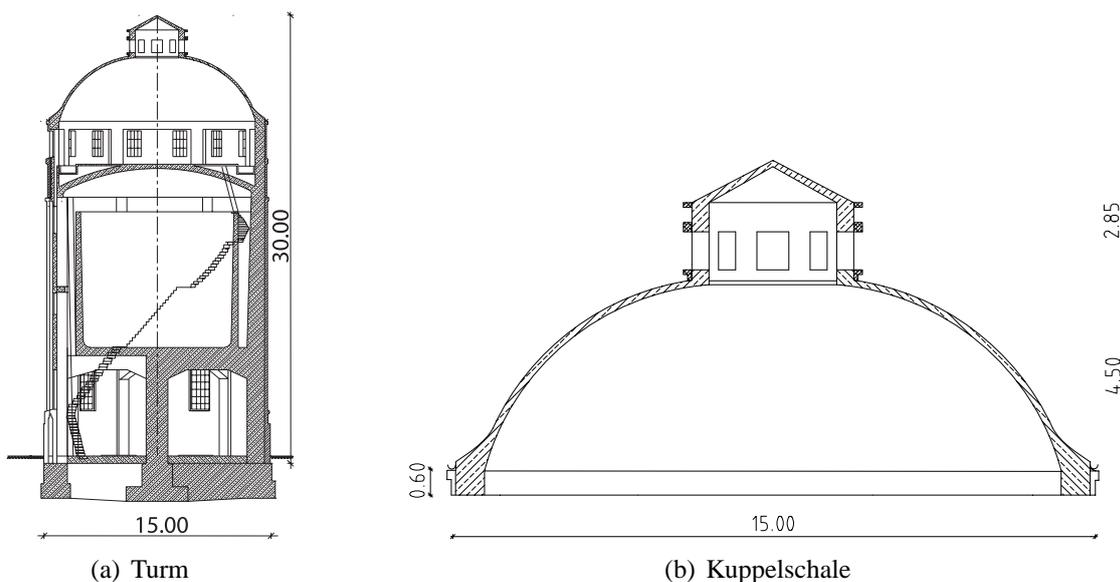


Abbildung 5.15: Abmessungen des Krümmeler Wasserturms

Abschnitt 5.2 Zahlenwerte für die Parameter gefunden, wobei die Anordnung einer Textilbeton-Verstärkungsschicht mit 4 Lagen Einzellege NWM3-020-00 auf einem Betongrundkörper aus Beton der Klasse B 25 zu Grunde gelegt wurde. Das so skalierte Versagensmodell für die Versagensform Delamination wird im folgenden Abschnitt bei der Simulation der Belastung eines zweifach gekrümmten Flächentragwerkes verwendet, bei dem eine Verstärkungsschicht aus dem o. g. Material auf eine stark geschädigte Betonkuppel aufgebracht wurde. Ziel der Untersuchungen könnte z. B. sein, festzustellen, ob und wie bei für ein Kuppelbauwerk real zu erwartenden Belastungen Delamination einer nachträglich aufgetragenen Verstärkungsschicht aus Textilbeton auftritt. Das zu diesem Zweck zu untersuchende Beispielobjekt, der Wasserturm in Krümmel bei Geesthacht, s. Abb. 5.14, weist starke Schädigungen auf, so dass der Einsatz einer Textilbeton-Verstärkungsschicht zur Sanierung der Kuppel in Erwägung gezogen wird. Der Wasserturm wurde 1916 erbaut und steht seit 1997 unter Denkmalschutz. Die Bauhöhe beträgt ca. 30 m ab Oberkante Gelände, und die Kuppel hat einen Außendurchmesser von ca. 15 m, s. Abb. 5.15. Die zu verstärkende Kuppelschale ist als Rotationsschale mit einem größten Innenradius von 6,64 m ausgebildet und weist eine Schalendicke von 0,14 m auf. Am oberen Rand der Konstruktion ist eine Laterne mit dem Durchmesser von 3,00 m und einer Bauhöhe von 2,85 m aufgesetzt (Abb. 5.15(b)). Sowohl am oberen als auch am unteren Rand der Schale ist ein Ringträger ausgebildet, wobei die Dickenänderung von dem unteren Ringträger zur Schale hin kontinuierlich erfolgt. Durch Verwitterung und Einwirkungen im 2. Weltkrieg wurde die Schale stark beschädigt. In der Folge entstanden großflächige Abplatzungen und mehrere Löcher. Die vorhandene Bewehrung ist in einigen Bereichen zu großen Teilen freigelegt, stark korrodiert und wird deshalb bei der Modellierung nicht explizit erfasst.

#### Diskretisierung und Vergleichsberechnungen.

Das System wurde mit insgesamt 120 Elementen, 80 zweischichtigen Schalenelementen im Kup-

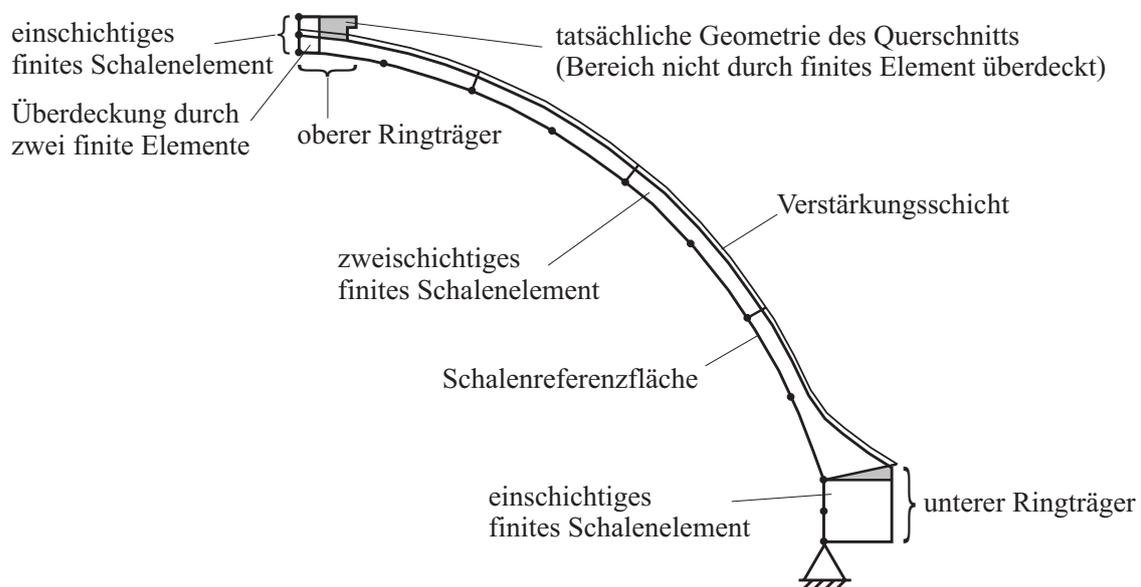
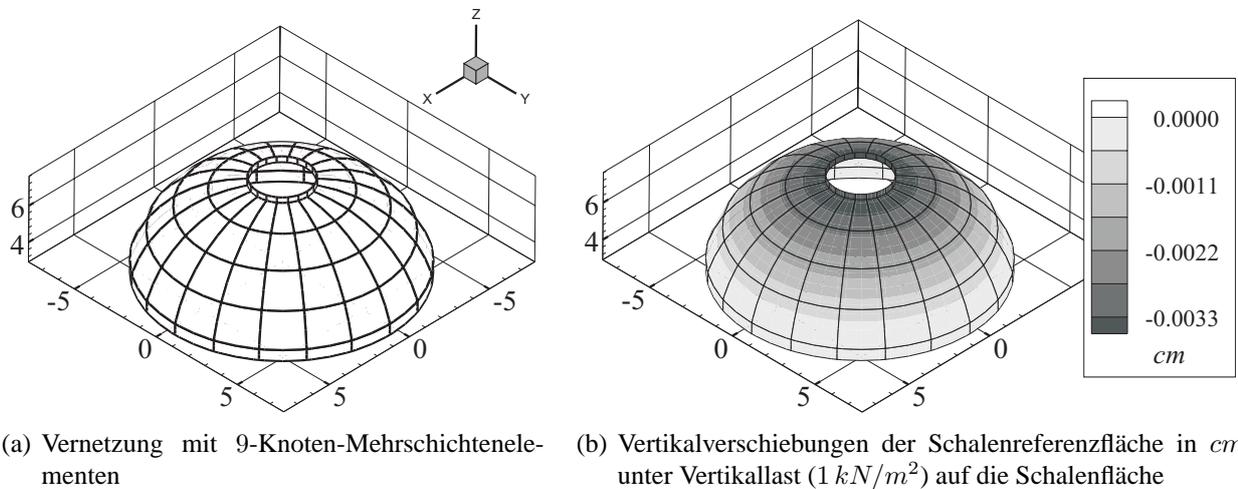


Abbildung 5.16: Querschnitt des diskretisierten Bereichs der Kuppelschale

pelbereich und 40 einschichtigen Schalenelementen für die Fortsetzungen der Geometrie am oberen und unteren Rand vernetzt, vgl. dazu den in Abb. 5.16 dargestellten Querschnitt der Rotationsschale. Am oberen und unteren Ringträger gibt es dabei Bereiche, in denen sich Elemente überdecken, d. h. durchdringen, und Bereiche (grau gekennzeichnet), die nicht durch ein Element überdeckt sind. Diese Ungenauigkeiten sind für die nachfolgenden Berechnungen von unterge-

ordneter Bedeutung. Das Funktionieren dieser Schalenelemente bei einer so deutlichen Dickenänderung, wie bei denen unmittelbar über dem unteren Ringträger wurde in [WEBER 2005] durch Beispielrechnungen gezeigt. Das Finite-Element-Netz mit den Anschlüssen des oberen und unteren



(a) Vernetzung mit 9-Knoten-Mehrschichtenelementen (b) Vertikalverschiebungen der Schalenreferenzfläche in  $cm$  unter Vertikallast ( $1 kN/m^2$ ) auf die Schalenfläche

Abbildung 5.17: Kuppelschale des Krümmeler Wasserturms

ren Randträgers ist in Abb. 5.17(a) bezüglich der Kuppel-Innenfläche, die auch Referenzfläche der Schalenelemente ist, dargestellt. Innerhalb jeder Schicht wurde eine Kinematik mit 2 Direktoren (anfangs 15 Freiheitsgraden je Knoten, in delaminierten Bereichen 18 Freiheitsgraden je Knoten) verwendet. Die Knoten am unteren Rand des unteren Randträgers sind unverschieblich, gelenkig in der Referenzfläche gelagert. Die Stelle der Lagerung in Schalen-Dickenrichtung wurde so gewählt, um die für die oberflächenorientierte Schalentheorie natürliche Lagerung in der Oberfläche benutzen zu können, für die die Formulierung einer Randbedingungsmatrix, vgl. Abschnitt 3.4, nicht erforderlich ist. Für den Betongrundkörper veränderlicher Dicke und die außen aufgebrachte Verstärkungsschicht der Dicke  $1,5 cm$  ist wiederum ein lineares Material zur Anwendung gekommen. Dabei wurde für den durch ein Textilgelege bewehrten Feinbeton der Verstärkungsschicht das in Abschnitt 5.2 bereits verwendete orthotrope, linear elastische Material mit den Konstanten  $E_1 = 28858 N/mm^2$ ,  $E_2 = 19242 N/mm^2$ ,  $E_3 = 27390 N/mm^2$ ,  $G_{12} = 11786 N/mm^2$ ,  $G_{13} = 11972 N/mm^2$ ,  $G_{23} = 11714 N/mm^2$  und  $\nu_{12} = 0,22$ ,  $\nu_{23} = 0,12$ ,  $\nu_{31} = 0,18$  für Elastizitätsmodul, Schubmodul und Querdehnung vorausgesetzt, wobei die Steifigkeiten für diese Simulation nicht abgemindert wurden. Dabei ist die 1-Richtung die Umlaufrichtung und die 3-Richtung die Schalennormalenrichtung. Für den Betongrundkörper wurde ein isotropes linear elastisches Material mit  $E = 14100 N/mm^2$ ,  $\nu = 0,2$  verwendet, das der starken Zerstörung des Betons Rechnung trägt.

Die Last aus Eigengewicht beträgt im Schalenbereich etwa  $3,5 kN/m^2$ . Zu Vergleichszwecken wurden zunächst geometrisch lineare Berechnungen unter einer gleichmäßigen vertikalen Flächenlast von  $1 kN/m^2$ , die auf die Schalenfläche ohne den oberen und unteren Anschluss wirken, am unverstärkten und verstärkten System durchgeführt. Die maximale Verschiebung in Belastungsrichtung am oberen Rand der Kuppel beträgt dabei am außen verstärkten System  $0,0353 mm$ , am unverstärkten, also vollständig einschichtigen System,  $0,0409 mm$ , am gleichen einschichtigen System bei verschieblicher, gelenkiger Lagerung des unteren Randträgers  $0,0411 mm$  und wiederum am einschichtigen System bei verschieblicher, gelenkiger Lagerung auf nur 8 gleichmäßig in Umfangsrichtung verteilten Punkten des unteren Randträgers  $0,0571 mm$ . Die Verteilung der auftretenden Vertikalverschiebungen (in  $z$ -Richtung) über die Kuppel-Innenfläche, die auch Referenzfläche der Schalenelemente ist, für das verstärkte System ist in Abb. 5.17(b) dargestellt.

### Nichtlineare Berechnungen mit Delaminationsermittlung.

Mit Hilfe weiterer Berechnungen, die zur Lösung des Verbundproblems durch ein iteratives Lösungsverfahren durchgeführt werden müssen, bei denen geometrisch nichtlinear, also mit nichtlinearen Verzerrungsmaßen, aber materiell linear gerechnet wurde, wurde bei Verwendung des vorgestellten Mehrschichten-Schalenmodells mit integrierten Kontaktbedingungen zur Beschreibung des Schichtenverbundes und des Fortschreitens der Delamination in etwa die Belastung, bei der unter halbseitiger vertikaler Flächenlast auf die Schalenfläche (in den zwei Quadranten  $y > 0$ ) Delamination einsetzt, ermittelt. In Abb. 5.18 ist das Voranschreiten der Schädigung der Kuppel durch Delamination bei Laststeigerung zwischen den Zuständen bei  $580 \text{ kN/m}^2$  halbseitiger Flächenlast (Abb. 5.18(a), 5.18(b)), bei  $670 \text{ kN/m}^2$  halbseitiger Flächenlast (Abb. 5.18(c), 5.18(d)) und bei  $720 \text{ kN/m}^2$  halbseitiger Flächenlast (Abb. 5.18(e), 5.18(f)) dargestellt. In den dunkel eingefärbten Bereichen der jeweils rechten Abbildungen tritt im jeweiligen Zustand in der Referenzfläche der Verstärkungsschicht Delamination auf, die bei etwa  $557 \text{ kN/m}^2$  erstmalig einsetzt. Jeweils links ist

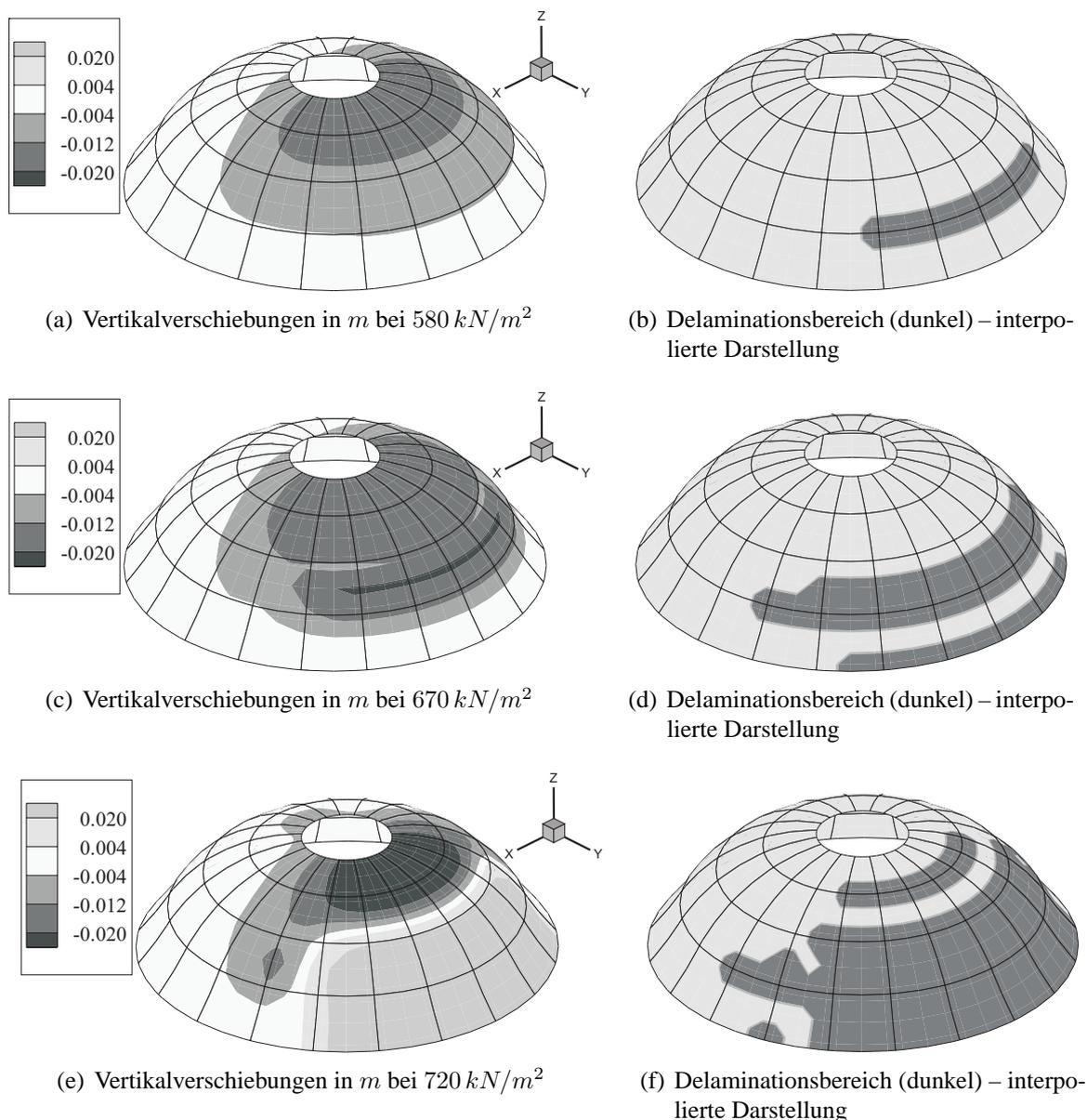


Abbildung 5.18: Delaminationsfortschritt bei halbseitiger Flächenlast

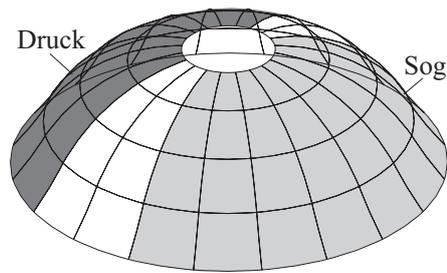


Abbildung 5.19: Bereiche mit senkrecht auf die Schalenfläche wirkendem Druck und Sog

der zugehörige Vertikal-Verschiebungszustand der Referenzfläche der Verstärkungsschicht in den einzelnen Laststufen dargestellt. Bis zum Erreichen erstmalig auftretender Delaminationen ist be-

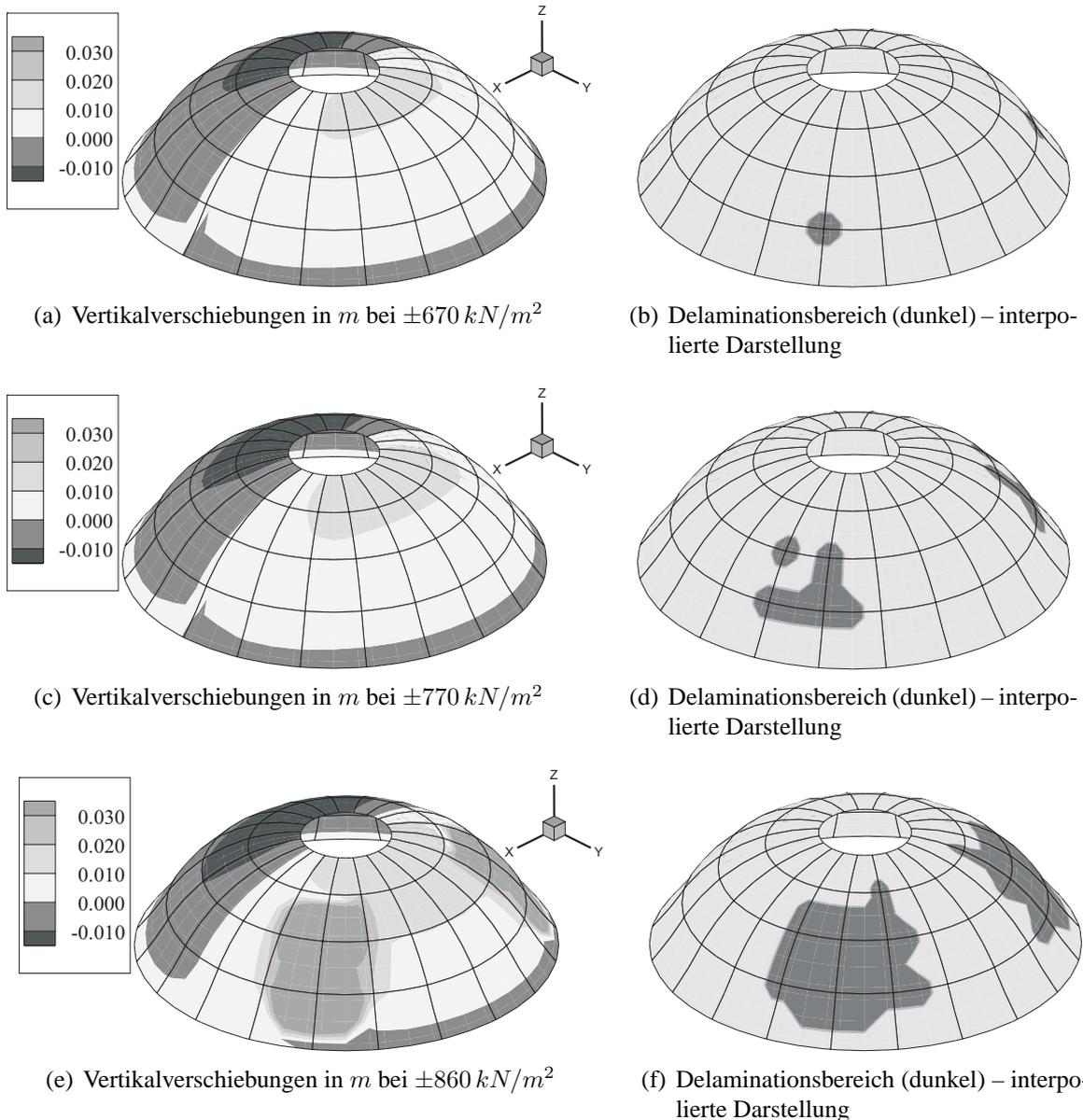


Abbildung 5.20: Delaminationsfortschritt bei bereichsweise senkrecht auf die Schalenfläche wirkendem Druck und Sog

reits ein Vielfaches der Belastung, die für die lineare Berechnung verwendet wurde, in das System eingetragen worden. Das heißt, Delaminationsversagen tritt unter realistischen Lastintensitäten bei dieser Belastungsform an der Kuppel nicht ein.

Die Belastung, bei der Delamination einsetzt, wird noch in einer weiteren Simulation der Verformungen unter einer anderen Lastform ermittelt. Dazu werden senkrecht zur Elementoberfläche Flächenlasten als Druckspannung (Druck) auf alle Elemente im Kuppelbereich in den zwei Quadranten  $y < 0$  und als Zugspannung (Sog) in den zwei Quadranten  $y > 0$  eingetragen, vgl. Abb 5.19. Ausgenommen sind alle Elemente im Kuppelbereich, die eine Elementkante bei  $y = 0$  haben, diese sind lastfrei. In Abb. 5.20 ist das Voranschreiten der Schädigung der Kuppel durch Delamination bei Laststeigerung zwischen den Zuständen bei  $\pm 670 \text{ kN/m}^2$  Flächenlast (Abb. 5.20(a), 5.20(b)), bei  $\pm 770 \text{ kN/m}^2$  Flächenlast (Abb. 5.20(c), 5.20(d)) und bei  $\pm 860 \text{ kN/m}^2$  Flächenlast (Abb. 5.20(e), 5.20(f)) dargestellt. In den dunkel eingefärbten Bereichen der jeweils rechten Abbildungen tritt im jeweiligen Zustand in der Referenzfläche der Verstärkungsschicht Delamination auf, die bei etwa  $\pm 624 \text{ kN/m}^2$  erstmalig einsetzt. Jeweils links ist wiederum der zugehörige Vertikal-Verschiebungszustand der Referenzfläche der Verstärkungsschicht in den einzelnen Laststufen dargestellt. Bis zum Erreichen erstmalig auftretender Delaminationen ist auch bei dieser Lastform bereits ein Vielfaches der Belastung, die für die Vergleichsberechnungen von  $1 \text{ kN/m}^2$  verwendet wurde und eine tatsächlich vorkommende Belastung darstellen könnte, in das System eingetragen worden. Das heißt auch hier, Delaminationsversagen tritt unter realistischen Lastintensitäten bei dieser Belastungsform an der Kuppel nicht ein.

Es wird noch einmal darauf hingewiesen, dass bei den Simulationen ausschließlich die Versagensform Delamination berücksichtigt wurde, die in den untersuchten Fällen offensichtlich erst nach dem Eintreten anderer maßgebender Versagensarten eintritt. Andere Versagensarten und auch deren Wechselwirkungen mit der Delamination wurden im Modell nicht berücksichtigt und sind Gegenstand weiterer Forschung im Bereich der Entwicklung eines dreidimensionalen Materialgesetzes - im vorliegenden Fall des Berechnungsbeispiels - für Textilbeton. Dieses kann innerhalb der Schichten des Schalenmodells integriert werden.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

Durch die vorliegende Arbeit wurde auf der Grundlage einer kontinuumsmechanischen Herangehensweise die Formulierung eines mechanischen Modells zur Simulation des Tragverhaltens geschichteter Flächentragwerks-Strukturen unter Berücksichtigung der Schädigungsart Delamination vorgestellt. Grundlage des Mehrschichten-Modells war die Entwicklung einer geometrisch nichtlinearen oberflächenorientierten Schalentheorie mit schub- und dickenelastischem Verhalten ausgehend von einer vollständigen Kinematik einer Multidirektor-Theorie. Der Oberflächenbezug gewährleistet eine auf Kontaktprobleme angepasste mechanische Modellbildung. Die Kontaktfläche befindet sich damit stets innerhalb der Referenzfläche des Schichtenkontinuums einer von zwei miteinander in Kontakt befindlichen Schalenschichten. Innerhalb der Schichten wurde ein linear elastisches, orthotropes Material verwendet, dessen Dreidimensionalität durch die Schalenformulierung nicht eingeschränkt wurde. Das Hauptaugenmerk der Arbeit lag auf der Entwicklung eines auf verschiedene Materialien anpassbaren Schichten-Verbundmodells. Das Versagen des Schichtenverbundes – Delamination genannt – wurde durch ein einfaches Spanningskriterium beschrieben. Die Schädigung durch Delamination wurde durch Modifikation der kinematischen Bedingungen berücksichtigt. Zur Beschreibung des Tragverhaltens nach erfolgter Delamination wurde ein

als „innerer Kontakt“ bezeichnetes Kontakt-Modell entwickelt, wodurch zwischen den Schichten Adhäsion berücksichtigt werden kann. Das vorliegende Schalenmodell kann auf Probleme, in denen kleine Relativverschiebungen zu erwarten sind, für beliebige elastische Materialien geeignet angewendet werden. Der Rahmen, in dem diese Arbeit entstand, gab den hauptsächlichlichen Einsatzbereich, die Simulation von Flächentragwerks-Strukturen mit einer Verstärkungsschicht aus textilbewehrtem Feinbeton, vor.

Im Rahmen der Umsetzung des Schalenmodells in die Finite-Element-Methode (FEM) wurden mehrschichtige isoparametrische Verschiebungs-Schalenelemente entwickelt. Diese wurden in das am Institut für Mechanik und Flächentragwerke der TU Dresden vorhandene FE-Programmpaket DREFES implementiert, das aus FORTRAN-Routinen aus dem Programmpaket PROFES und Original Quelltext des Programmpakets FEABL besteht, welches im Massachusetts Institute of Technology in den USA entwickelt wurde. Einen Vorteil der als „innerer Kontakt“ bezeichneten Modellierung gegenüber klassischen Kontaktmodellen stellt die deutliche Vereinfachung der Kontakt-detektion dar. Sie findet zwischen Schichten innerhalb jeweils eines finiten Elementes statt.

Für den Vergleich der mit den Schalenmodellen möglichen numerischen Simulationen der mechanischen Belastung von Schichtenverbunden mit Versuchen dienten sogenannte Verbundversuche, und zwar der Abzug einer Lasche aus Textilbeton von einem Betongrundkörper. Darüber hinaus wurde ein quantitativer Vergleich einer numerischen Simulation mit einem in der Literatur zu findenden Beispiel durchgeführt, und zwar anhand einer Platte aus kohlefaserverstärktem Kunststoff.

## 6.2 Ausblick

Die gleichzeitige Verwendung von inelastischem Materialverhalten innerhalb des Schalenkontinuums und der Mehrschichten-Schalenkinematik mit verschieblichen Schichten im Rahmen des vorliegenden Schichten-Verbundmodells ermöglicht eine bessere Beschreibung der in Versuchen festgestellten Effekte.

### **Kombinierter Einsatz von vorliegendem Schichten-Verbundmodell mit einem Materialmodell auf der Grundlage von Plastizitäts- und Schädigungsformulierungen.**

Von der Vielzahl der möglichen Schädigungsarten insbesondere beim Einsatz der Modelle für die Simulation von inelastischen Materialien wie textilbewehrtem Beton, wurde in der vorliegenden Arbeit nur die flächige Ablösung einer Schicht von einer anderen, also Delamination behandelt. Die Interaktionen einzelner Versagensarten spielen jedoch bei der Simulation des Versagens von Laminaten und laminatähnlichen Strukturen insbesondere bei der Verwendung von textilbewehrtem Feinbeton für die Einschätzung des Gesamttragverhaltens eines Tragwerkes eine entscheidende Rolle. Risse aus Delaminationen können in Fortsetzung eines Matrixrisses von ihrem Verlauf entlang einer Grenzfläche zweier benachbarter Schichten abweichen. Das macht die eindeutige Identifikation der Versagensart schwierig und lässt deren isolierte Berücksichtigung unmöglich erscheinen. Im Zusammenhang mit dem Einsatz des vorliegenden Schalenmodells für inelastische Materialien wie Textilbeton ist daher die Formulierung eines Materialmodells auf der Grundlage von Plastizitäts- und Schädigungsformulierungen zur Anwendung innerhalb des Schalenkontinuums für eine bessere Annäherung der Simulationen an die vorgestellten Versuche unumgänglich. Dieses zu findende Materialmodell kann mit dem vorliegenden Schichten-Verbundmodell kombiniert werden.

### **Einsatz des vorliegenden Schichten-Verbundmodells in Verbindung mit einer Modelladaptivität.**

Das bisher geschaffene Modell gewährleistet die Möglichkeit des sich Herausbildens von Delaminationsflächen an vorher festgelegten Stellen, und zwar an den Schichtgrenzen der von vornherein

definierten Schichten. Je mehr solcher Stellen vorgesehen werden, desto größer wird allerdings die Anzahl der Freiheitsgrade und damit der numerische Aufwand. In der weiteren Entwicklung sollte eine Modelladaptivität, und zwar eine automatische Anpassung der Kinematik auf der Grundlage der bei Verwendung eines inelastischen Materialverhaltens festgestellten, zur Schalenreferenzfläche „parallelen“ Gleitflächen, angestrebt werden. Ausgehend z. B. von einer Einschichtenkinematik könnte in Elementen, in denen die dreidimensionalen Spannungszustände die Versagensflächen des Materialgesetzes an einigen Punkten des Schalenkontinuums erreichen, auf die bereits entwickelten mehrschichtigen Schalenkinematiken umgeschaltet werden. Dabei orientieren sich die neu eingeführten Schichtengrenzen an den überbeanspruchten Zonen. So können sich in plastizierenden Bereichen innerhalb eines Tragwerks sukzessive mehrschichtige Elemente nach dem Vorbild des vorliegenden Schichten-Verbundmodells herausbilden. Durch diese Modellerweiterung können jedoch Schrägrisse nach wie vor nicht diskret simuliert werden.

#### **Weiterentwicklung des Kontakt-/Verbundgesetzes.**

Im Zusammenhang mit der Beschreibung des Verbundes stellt die genauere Ermittlung von Kontaktflächen im Sinne der Kontaktmechanik, d. h. des delaminierten bzw. nicht delaminierten Bereiches im Mehrschichten-Verbundmodell, einen weiteren Schwerpunkt dar, und zwar als von der Diskretisierung unabhängige krummlinig begrenzte Fläche. Beim Einsatz von wenigen großen Elementen reicht die Auswertung des Versagenskriteriums nur an den Integrationspunkten ggf. nicht aus. Im vorliegenden Schichten-Verbundmodell werden im Rahmen der Finite-Element-Formulierung Informationen über den Verbundzustand nur an den 9 Element-Knotenpunkten des finiten Mehrschichtenelementes gespeichert. In Fällen, in denen das Flächentragwerk durch wenige große Elemente diskretisiert wird, kann zwar ggf. vor auftretender Delamination eine sehr gute Simulation des Tragverhaltens erreicht werden, eine angemessen genaue Erfassung der delaminierenden Bereiche ist dort jedoch nicht immer möglich. Für eine diskretisierungsunabhängige Beschreibung der Verbundproblematik müsste innerhalb der Elemente eine genauere, nicht von den Integrationspunkten bzw. den Element-Knotenpunkten abhängige Beschreibung der delaminierten Flächen bzw. Kontaktflächen vorgenommen werden. Es sollte auf der Grundlage von noch zu findenden Kriterien, die an den Integrationspunkten in den Schichtenreferenzflächen der finiten Elemente ausgewertet werden, der Verlauf der Ränder von Kontaktflächen zwischen den Integrationspunkten festgelegt werden. Die zusätzlichen Informationen über die Geometrie dieser Flächen werden über die Element-Knotenpunkte weitergegeben.



## Literaturverzeichnis

- ABOUDI, J.: *Mechanics of Composite Materials. Studies in Applied Mechanics 29*, Elsevier Science Limited, Amsterdam, 1991
- BAŞAR, Y.; HANSKÖTTER, U.; ITSKOV, M.: Multi-Director and Multi-Layer Finite Shell Elements. In: BERNADOU, M.; CIARLET, P. G.; VIAÑO, J. M. (Hrsg.): *Proceedings of the International Conference on Shells: Mathematical Modelling and Scientific Computing*, Universidade Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1997, S. 29–33.
- BAŞAR, Y.; KRÄTZIG, W. B.: *Mechanik der Flächentragwerke*. Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, 1985
- BATHE, K. J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 1990
- BAZANT, Z. P.; DESMORAT, R.: Size Effect in Fiber or Bar Pullout with Interface Softening Slip. *Journal of Engineering Mechanics* 120 (1994), S. 1945–1962
- BENTUR, A.; MINDESS, S.: *Fibre Reinforced Cementitious Composites*. Elsevier Applied Science, London, 1990
- BISCHOFF, M.: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1999
- BOGDANOVICH, A. E.; PASTORE, C. M.: *Mechanics of Textile and Laminated Composites*. Chapman and Hall Ltd., London, 1996
- BRAUN, M.; BISCHOFF, M.; RAMM, E.: Nonlinear Shell Formulations for Complete Three-Dimensional Constitutive Laws Including Composites and Laminates. *Computational Mechanics* 15 (1994), S. 1–18
- BREWER, J. C.; LAGACE, P. A.: Quadratic Stress Criterion for Initiation of Delamination. *Journal of Composite Materials* 22 (1988), S. 1141–1155
- BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A.; MUSIOL, G.; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 4. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1999
- BUCHER, A.: *Deformationsgesetze für große elastisch-plastische Verzerrungen unter Berücksichtigung einer Substruktur*. Dissertation, Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik, Chemnitz, 2001
- CURBACH, M.: *Textile Reinforced Structures, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Colloquium on Textile Reinforced Structures (CTRS2), 29.9.–1.10.2003*. Technische Universität Dresden, Dresden, 2003
- CURBACH, M.; ORTLEPP, R.: Besonderheiten des Verbundverhaltens von Verstärkungsschichten aus textilbewehrtem Beton. In: CURBACH, M. (Hrsg.): *Textile Reinforced Structures, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Colloquium on Textile Reinforced Structures (CTRS2), 29.9.–1.10.2003*. Technische Universität Dresden, Dresden, 2003
- DAMME, S.: *Zur Präzisierung der tensoriellen Formulierung der Differentialgeometrie von Flächentragwerken mit Anwendung auf eine oberflächenorientierte Schalentheorie*. Belegarbeit, Technische Universität Dresden, Lehrstuhl für Mechanik, Dresden, 2000
- DOLL, S.: *Zur numerischen Behandlung großer elasto-viskoplastischer Deformationen bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten*. Dissertation, Universität Karlsruhe, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Karlsruhe, 1998
- ECKSTEIN, A.: *Zur Theorie und Finite-Element-Simulation von Schalen mit großen inelastischen Dehnungen und duktilen Schädigungen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Bochum, 1999
- ERINGEN, A. C.: *Mechanics of Continua*. 2. Aufl., Wiley-VCH-Verlag GmbH, 1980

- GARG, A. C.: Delamination - A Damage Mode in Composite Structures. *Engineering Fracture Mechanics* 29(5) (1988), S. 557–584
- GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. 6. Aufl., Springer-Verlag, Wien, 1963
- GRUTTMANN, F.: *Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen*. Habilitation, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Nr. F 96/1, Universität Hannover, Hannover, 1996
- HASHIN, Z.: Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *Journal of Applied Mechanics* 47 (1980), S. 329–334
- HERAKOVICH, C. T.: *Mechanics of Fibrous Composites*. John Wiley&Sons Inc., New York, 1998
- HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882), S. 156–171.
- HILL, R.: A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Materials. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 193 (1948), S. 281–298.
- HILSDORF, H. K.; REINHARDT, H.-W.: *Beton*. Ernst & Sohn, Berlin, 1998.
- HÖRMANN, M.: *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Stuttgart, 2002
- HWANG, W. C.; SUN, C. T.: Failure Analysis of Laminated Composites by Using Iterative Three-dimensional Finite Element Method. *Computers and Structures* 33 (1989), S. 41–47
- JESSE, F.: *Tragverhalten von unidirektionalen und textilen Bewehrungen aus Multifilamentgarnen in einer zementgebundenen Matrix*. Dissertation, Technische Universität Dresden, Institut für Massivbau, Dresden, 2004
- KIKUCHI, N.; ODEN, J. T.: *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1988
- KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. 2. Aufl., BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1989
- KRÄTZIG, W. B.: Bestmögliche innere Schalengleichungen für schubweiche Werkstoffe unter Berücksichtigung von Dickenänderungen. *Archive of Applied Mechanics* 64 (1993), S. 1–19.
- LAURSEN, T. A.: *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- LEE, J. D.: Three Dimensional Finite Element Analysis of Damage Accumulation in Composite Laminate. *Computers and Structures* 15 (1982), S. 335–350.
- LÖBLEIN, J.: *Ein Modell zur Beschreibung finiter anisotroper elastoplastischer Deformationen unter Berücksichtigung diskreter Rissausbreitung*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen, Institut für Mechanik, Essen, 2004
- MATHEAS, J.: *Entwicklung einer oberflächenorientierten Schalentheorie und deren Anwendung im Rahmen der Finite-Element-Methode*. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, Lehrstuhl für Mechanik, Dresden, 1998
- MATHEAS, J.; SCHLEBUSCH, R.; ZASTRAU, B.: Zur Herleitung einer oberflächenorientierten Schalentheorie und deren Umsetzung im Rahmen der Finite-Element-Methode. In: *Textilbeton - Fachkolloquium der Sonderforschungsbereiche 528 und 532, 15.–16. Februar 2001*. CTRS1, Aachen, Deutschland, 2001, S. 193–204.
- MATHEAS, J.; SCHLEBUSCH, R.; ZASTRAU, B.: On a Surface-Related Multi-Layer Shell Theory and its Application to Compound Structures. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)* 3,1 (2003), Wiley Interscience, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, S. 304–305

- MATHEAS, J.; SCHLEBUSCH, R.; ZASTRAU, B.: Mechanisches Modell und numerische Simulation von Flächentragwerken mit Verstärkung aus Textilbeton. In: GEBBEKEN, N. (Hrsg.): *Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Aktuelle Beiträge aus Baustatik und Comp. Mechanics*. 03/3 (2003), Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, S. 313–325
- NAGHDI, P. M.: Foundations of Elastic Shell Theory. In: SNEDDON, I. N.; HILL, R. (Hrsg.): *Progress in Solid Mechanics*, Nord-Holland Publishing Company, Inc., Amsterdam, 4 (1963), S. 1–90
- PAGANO, N. J.: Stress Fields in Composite Laminates. *International Journal of Solids and Structures* 14 (1978), S. 385–400
- PUCK, A.: *Festigkeitsanalyse an Faser-Matrix-Laminaten: Realistische Bruchkriterien und Degradationsmodelle*. Hanser, München, 1996
- RAMM, E.; BRAUN, M.; BISCHOFF, M.: Higher Order Nonlinear Shell Formulations: Theory and Application. *IASS 36* (1995), S. 145–152
- RAOUS, M.: Quasistatic Signorini Problem with Coulomb Friction and Coupling to Adhesion. In: WRIGGERS, P.; PANAGIOTOPOULOS, P. (Hrsg.): *New Developments in Contact Problems*, Springer, New York, 1999, S. 55–100
- REDDY, J. N.: On Refined Computational Models of Composite Laminates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 27 (1989), S. 361–382
- REISSNER, E.: On the Theory of Bending of Elastic Plates. *Journal of Mathematics and Physics* 23 (1944), S. 184–191
- RICHTER, M.: *Entwicklung mechanischer Modelle zur analytischen Beschreibung der Materialeigenschaften von textilbewehrtem Feinbeton*. Dissertation, Berichte des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke, Heft 2, Technische Universität Dresden, Institut für Mechanik und Flächentragwerke, Dresden, 2005
- ROTHERT, H.; ZASTRAU, B. W.: Herleitung und Anwendung einer kontaktproblemorientierten Schalentheorie. *Konstruktiver Ingenieurbau – Berichte (KIB)* 38/39 (1981), S. 76–84
- SCHLEBUSCH, R.: *Theorie und Numerik einer oberflächenorientierten Schalenformulierung*. Dissertation, Technische Universität Dresden, Dissertation, Berichte des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke, Heft 3, Institut für Mechanik und Flächentragwerke, Dresden, 2005
- SCHOOP, H.: Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen. *Ingenieur-Archiv* 56 (1986), S. 427–437
- SCHULTZ, R.: *Nichtlineare Struktur- und Versagensanalyse von Faserverbundsystemen mit Mehrschichtenschalenelementen*. Dissertation, Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen, Ruhr-Universität Bochum 96-3, 1996
- SIMO, J. C.; RIFAI, M. S.: A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29 (1990), S. 1595–1638
- SPRENGER, W.: *Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente*. Dissertation, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, Karlsruhe, 2000
- STEINIGEN, F.: *Numerische Simulation des Tragverhaltens textilverstärkter Bauwerke*. Dissertation, Technische Universität Dresden, Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, Dresden, 2006
- TSAI, S. W.; WU, E. M.: A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *Journal of Composite Materials* 5 (1971), S. 58–80
- WAGNER, W.; GRUTTMANN, F.: *FE-Modeling of Fiber Reinforced Polymer Structures*, Mitteilung 7/2002, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, 2002

- WEBER, W.: *Numerische Simulation der Beanspruchung von mit Textilbeton verstärkten Flächentragwerken*. Belegarbeit, Technische Universität Dresden, Institut für Mechanik und Flächentragwerke, Dresden, 2005
- WILLNER, K.: *Kontinuums- und Kontaktmechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- WRIGGERS, P.: *Finite Element Algorithms for Contact Problems*. Archives of Computational Methods in Engineering 2(4) (1995), S. 1–49.
- WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- ZASTRAU, B.; SCHLEBUSCH, R.; MATHEAS, J.: Surface-related Shell Theories for the Treatment of Composites and Contact Problems. In: *Fourth International Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures, 5.–7. Juni 2000*. IASS-IACM 2000, Chania-Kreta, Griechenland, 2000.
- ZASTRAU, B.; LEPENIES, I.; MATHEAS, J.; RICHTER, M.; SCHLEBUSCH, R.: Textilbewehrter Beton - von der Beschreibung des Materialverhaltens zur Entwicklung einer adäquaten Schalentheorie. In: ZASTRAU, B.; GEBBEKEN, N.; KALISKE, M.; NASDALA, L. (Hrsg.): *Aktuelles aus Forschung und Praxis im Umfeld von Mechanik und Statik, Jubiläumsschrift H. Rothert. Berichte des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke*. 1 (2003), Technische Universität Dresden, Dresden, S. 159–178
- ZASTRAU, B.; MATHEAS, J.; RICHTER, M.: FE-Modellierung von faserverstärkten Flächentragwerken unter Berücksichtigung von Delamination. In: MÖLLER, B.; RUGE, P.; JÄGER, W.; KOLBMÜLLER, A. (Hrsg.): *10. Dresdner Baustatik-Seminar, Trends in Statik und Dynamik*. Technische Universität Dresden, Institut für Statik und Dynamik, Dresden, 2006, 12 S.
- ZASTRAU, B.; MATHEAS, J.; SCHLEBUSCH, R.: Oberflächenorientierte Multidirektor-Mehrschichten-Schalenmodelle. In: CURBACH, M. (Hrsg.): *Textile Reinforced Structures, Proceedings of the 2nd Colloquium on Textile Reinforced Structures (CTRS2), 29.9.–1.10.2003*. Technische Universität Dresden, Dresden, 2003, S. 411–422
- ZIENKIEWICZ, O.: *Methode der finiten Elemente*. 2. Auflage, Carl-Hanser-Verlag, München, 1983



# Schriftenreihe Konstruktiver Ingenieurbau Dresden

- Heft 1 Dirk Proske  
Beitrag zur Risikobeurteilung von alten Brücken unter Schiffsanprall
- Heft 2 Manfred Curbach (Hrsg.)  
Rissbreitennachweise an Stahlbetonbauteilen
- Heft 3 Neue Wege im Stahlbau  
Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang Graße zum 65. Geburtstag
- Heft 4 Peter Lieberwirth  
Beitrag zur Anwendung zuverlässigkeitstheoretischer  
Berechnungsverfahren auf stahlbautypische Problemstellungen
- Heft 5 Frank Jesse  
Tragverhalten von Filamentgarnen in zementgebundener Matrix
- Heft 6 Lars Eckfeldt  
Analytische Möglichkeiten und Grenzen der Berechnung  
von Rissbreiten in veränderlichen Verbundsituationen
- Heft 7 Andreas Heiduschke  
Seismic behavior of moment-resisting timber frames  
with densified and textile reinforced connections
- Heft 8 Frank Hannawald  
Zur physikalisch nichtlinearen Analyse von Verbund-Stabtragwerken  
unter quasi-statischer Langzeitbeanspruchung (in Vorbereitung)