

Technische Universität Chemnitz

Fakultät für Maschinenbau

Diplomarbeit

- Thema:** FEM-Analyse von Pressverbindungen
auf einem Wellenabsatz bei Naben-
überstand und -unterstand
- vorgelegt von:** cand. ing. Dirk Schellenberg
geb. am: 29.06.1978 in: Freiberg
- Hauptfach:** Angewandte Mechanik
- Betreuer:** Prof. Dr.-Ing. habil. R. Kreißig
Dr.-Ing. H. Ansorge
Prof. Dr.-Ing. habil. H. Gropp

Schellenberg, Dirk

FEM-Analyse von Pressverbindungen auf einem Wellenabsatz bei Nabenüberstand und -unterstand

Diplomarbeit an der Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Chemnitz, Institut für Mechanik, 2004

117 Seiten
91 Abbildungen
6 Tabellen
53 Literaturzitate

Referat:

Kraftschlüssige Welle-Nabe-Verbindungen besitzen im Maschinenbau eine große Bedeutung. Bei der Übertragung von Biegemomenten kann es zu Relativbewegungen zwischen Welle und Nabe kommen. Die dabei entstehende Reibkorrosion setzt im Allgemeinen die Tragfähigkeit herab und führt zu Reibdauerbrüchen.

In der hier vorliegenden Arbeit wurde die Zylinderpressverbindung unter thermischer und Wechselbiegebeanspruchung für gegebene Abmaße numerisch simuliert. Vordergründiges Ziel war es, das Verhalten von Welle-Nabe-Verbindungen bei Belastung für Nabenüberstand und -unterstand miteinander zu vergleichen.

Schlagworte:

Welle-Nabe-Verbindung – Pressverbindung – Reibung – Reibkorrosion – Reibdauerbeanspruchung – dynamische Belastung – Wechselbiegung – Finite-Elemente-Methode – Wellenabsatz – Nabenüberstand – Nabenunterstand

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	8
2	Grundlagen	10
2.1	Mathematische Hilfsmittel	10
2.2	Elastizitätstheorie	11
2.3	Analytische Lösung des Randwertproblems	15
2.3.1	Ebener Spannungszustand	16
2.3.2	Axialsymmetrie	17
2.4	Plastizitätstheorie	19
2.5	Finite-Elemente-Methode	20
3	Reibdauerbeanspruchung	23
3.1	Entstehung und Auswirkung von Reibkorrosion	23
3.2	Einfluss der Reibkorrosion auf das Festigkeitsverhalten	24
3.3	Berechnungskonzepte	25
3.3.1	Nennspannungskonzepte	25
3.3.2	Konzept nach Leidich	25
3.3.3	Ruiz-Chen-Kriterium	26
4	Entwurfsberechnung	28
4.1	Technische Daten der Pressverbindung	28
4.2	Berechnung nach DIN 7190	30
4.2.1	Grundlagen	31
4.2.2	Berechnung von rein elastisch beanspruchten Pressverbänden	33
4.2.3	Berechnung elastisch-plastisch beanspruchter Pressverbände	33
4.2.4	Anwendung für Materialpaarung St37-St50	37
4.2.5	Anwendung für Materialpaarung 16MnCr5-42CrMo4	38
4.3	Kontinuumsmechanische Betrachtung	39
4.4	Festigkeitsnachweis nach DIN 743	44
4.4.1	Nachweis für Materialpaarung St37-St50	46
4.4.2	Nachweis für Materialpaarung 16MnCr5-42CrMo4	48

	3
5 FEM-Analyse des Pressverbandes	50
5.1 Digitalisierung der Geometrie	52
5.2 FE-Netz-Erstellung im 2D-Raum	52
5.2.1 Vernetzung nach unterschiedlichen Strategien	52
5.2.2 Simulation des Fügevorganges	54
5.2.3 Auswertung der Varianten 1-3	55
5.2.4 Behandlung der Eckensingularitäten	56
5.2.5 Auswertung der graduellen Vernetzung	57
5.2.6 Optimierung der 2D-Vernetzung	58
5.2.7 Vergleich der optimierten 2D-Modelle	59
5.3 Elastisch-Plastische Analyse - Betrachtung des Meridianschnitts . . .	59
5.3.1 Theoretische Vorbetrachtung	60
5.3.2 Fügevorgang für elastisch-plastisches Verhalten	60
5.3.3 Auswertung von 2D-grad-fein bei Elasto-Plastizität	61
5.4 Überführung in den 3D-Raum	62
5.5 Elastisch-Plastische Analyse im 3D-Raum	62
5.5.1 Definition der Lastfälle	62
5.5.2 Auswertung des 3D-Modells nach dem Fügen	64
5.5.3 Auswertung des 3D-Modells nach Belastung	64
5.5.4 Bewertung der Ergebnisse des 3D-Modells	67
6 Zusammenfassung und Ausblick	69
A Abbildungen	70
Liste häufig verwendeter Formelzeichen	109
Literaturverzeichnis	113
Selbständigkeitserklärung	117

Abbildungsverzeichnis

2.1	Ausgangs- und Momentankonfiguration eines Körpers	12
4.1	Schnitt der Welle-Nabe-Verbindung	28
4.2	Spannungs-Dehnungs-Kurven der verwendeten Werkstoffe	30
4.3	Berechnungsmodell der Pressverbindung nach DIN 7190	31
4.4	Elastisch-plastisch beanspruchte Nabe nach DIN 7190	34
4.5	Verschiebungsverhältnisse in der Pressfuge	43
4.6	Abmessungen der Welle nach DIN 743	44
5.1	Ablaufplan für numerische Untersuchung	51
5.2	Grobe Vernetzung (Variante 1) für Nabenüberstand	52
5.3	Feine Vernetzung (Variante 2) für Nabenüberstand	53
5.4	Bias-Vernetzung (Variante 3) für Nabenüberstand	53
5.5	Randbedingungen für Variante 1	55
5.6	Graduelle Netzverfeinerung - uniformes und transformiertes Netz . . .	57
5.7	lokal graduell verfeinertes Netz	58
5.8	Foto der Versuchsanordnung [21]	63
5.9	Überhöhte Darstellung der Verformung des Modells 3D-quad bei Bie- gung nach unten	65
5.10	Schlupfamplitude für Wechselbiegung von Zustand 1 nach Zustand 2 .	66
A.1	Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..40mm$ bei Nabenüberstand	71
A.2	Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..5mm$ bei Nabenüberstand	71
A.3	Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..40mm$ bei Nabenunterstand	72
A.4	Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..5mm$ bei Nabenunterstand	72

A.5	Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..40mm$ bei Nabenüberstand	73
A.6	Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..5mm$ bei Nabenüberstand	73
A.7	Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..40mm$ bei Nabenunterstand	74
A.8	Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..5mm$ bei Nabenüberstand	74
A.9	Graduelle Vernetzung für $n=10$ bei Nabenüberstand	75
A.10	Graduelle Vernetzung für $n=10$ bei Nabenüberstand - Detail	75
A.11	Graduelle Vernetzung für $n=20$ bei Nabenüberstand - Detail	76
A.12	Graduelle Vernetzung für $n=30$ bei Nabenüberstand - Detail	76
A.13	Graduelle Vernetzung für $n=40$ bei Nabenüberstand - Detail	77
A.14	Graduelle Vernetzung für $n=10$ bei Nabenunterstand	77
A.15	Graduelle Vernetzung für $n=10$ bei Nabenunterstand - Detail	78
A.16	Graduelle Vernetzung für $n=20$ bei Nabenunterstand - Detail	78
A.17	Graduelle Vernetzung für $n=30$ bei Nabenunterstand - Detail	79
A.18	Graduelle Vernetzung für $n=40$ bei Nabenunterstand - Detail	79
A.19	Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für $n=10,20,30,40$ der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..2mm$ bei Nabenüberstand .	80
A.20	Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für $n=10,20,30,40$ der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..2mm$ bei Nabenunterstand .	80
A.21	Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für $n=10,20,30,40$ der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..0.5mm$ bei Nabenunterstand	81
A.22	Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für $n=10,20,30,40$ der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..2mm$ bei Nabenüberstand	81
A.23	Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für $n=10,20,30,40$ der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..2mm$ bei Nabenunterstand	82
A.24	Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für $n=10,20,30,40$ der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..0.5mm$ bei Nabenunterstand	82
A.25	Modell 2D-grad-fein bei Nabenüberstand	83
A.26	Modell 2D-grad-fein bei Nabenüberstand - Detail	83
A.27	Modell 2D-grad-fein bei Nabenunterstand	84
A.28	Modell 2D-grad-fein bei Nabenunterstand - Detail	84
A.29	Modell 2D-grad-grob bei Nabenüberstand	85
A.30	Modell 2D-grad-grob bei Nabenüberstand - Detail	85

A.31 Modell 2D-grad-grob bei Nabenunterstand	86
A.32 Modell 2D-grad-grob bei Nabenunterstand - Detail	86
A.33 Modell 2D-quad-fein bei Nabenüberstand - Detail	87
A.34 Modell 2D-quad-fein bei Nabenunterstand - Detail	87
A.35 Modell 2D-quad-grob bei Nabenüberstand - Detail	88
A.36 Modell 2D-quad-grob bei Nabenunterstand - Detail	88
A.37 Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für Variante 2, 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..40mm$	89
A.38 Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für Variante 2, 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..0.4mm$	89
A.39 Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..0.06mm$	90
A.40 Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für Variante 2, 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..40mm$	90
A.41 Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für Variante 2, 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..0.4mm$	91
A.42 Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..0.06mm$	91
A.43 Kontaktnormalspannungen im Bereich $z = 0..0,5mm$ an der Wellenoberseite von 2D-grad-fein	92
A.44 Axialspannungen im Bereich $z = 0..1mm$ an der Wellenoberseite von 2D-grad-fein	92
A.45 Spannungen im Bereich $z = 0..0,5mm$ an der Wellenoberseite von 2D-grad-fein für die Werkstoffpaarung 42CrMo4-16MnCr5	93
A.46 Vergleichsspannungen im Bereich $z = 0..0,5mm$ an der Wellenoberseite von 2D-grad-fein für die Werkstoffpaarung 42CrMo4-16MnCr5	93
A.47 Übererhöhte Darstellung der elastisch-plastischen Verformung und ε_{eq}^{pl} von 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenüberstand	94
A.48 Überhöhte Darstellung der elastisch-plastischen Verformung und ε_{eq}^{pl} für die Nabe von 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenüberstand - Detail	94
A.49 Überhöhte Darstellung der elastisch-plastischen Verformung und ε_{eq}^{pl} für die Welle von 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenüberstand - Detail	95
A.50 Elastische Dehnung in axialer Richtung ε_{zz}^{el} in 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenüberstand	96
A.51 Elastische Dehnung in axialer Richtung ε_{zz}^{el} in 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenüberstand - Detail	96
A.52 Überhöhte Darstellung der elastisch-plastischen Verformung und ε_{eq}^{pl} von 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenunterstand	97

A.53 Überhöhte Darstellung der elastisch-plastischen Verformung und ε_{eq}^{pl} für die Nabe von 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenunterstand - Detail	97
A.54 Elastische Dehnung in axialer Richtung ε_{zz}^{el} in 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenunterstand	98
A.55 Elastische Dehnung in axialer Richtung ε_{zz}^{el} in 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenunterstand - Detail	98
A.56 Modell 3D-quad bei Nabenüberstand	99
A.57 Modell 3D-quad bei Nabenüberstand - Detail	99
A.58 Modell 3D-grad bei Nabenüberstand - Detail	100
A.59 Modell 3D-quad bei Nabenunterstand	100
A.60 Modell 3D-quad bei Nabenunterstand - Detail	101
A.61 Modell 3D-grad bei Nabenunterstand - Detail	101
A.62 Vergleich der Kontaktnormalspannungen von 3D-grad, 3D-quad und 2D-grad-fein im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenüberstand	102
A.63 Vergleich der Kontaktnormalspannungen von 3D-grad, 3D-quad und 2D-grad-fein im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenunterstand	102
A.64 Vergleich der Axialspannungen von 3D-grad, 3D-quad und 2D-grad-fein im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenüberstand	103
A.65 Vergleich der Axialspannungen von 3D-grad, 3D-quad und 2D-grad-fein im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenunterstand	103
A.66 Radialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenüberstand	104
A.67 Radialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenunterstand	104
A.68 Axialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0..42mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenüberstand	105
A.69 Axialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenüberstand	105
A.70 Axialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0..42mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenunterstand	106
A.71 Axialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenunterstand	106
A.72 FFDP (Fretting/Fatigue Damage Parameter) auf der Wellenoberseite des Modelles 3D-quad für Zustand 2 im Bereich $z = 0..5mm$ bei Nabenunterstand	107
A.73 Vergleichsspannungen auf der Wellenoberseite des Modelles 3D-quad für Zustand 1 im Bereich des Wellenabsatzes	108
A.74 Vergleichsspannungen auf der Wellenoberseite des Modelles 3D-quad für Zustand 2 im Bereich des Wellenabsatzes	108

Kapitel 1

Einleitung

Pressverbindungen gehören zu den kraftschlüssigen Welle-Nabe-Verbindungen [26] und kommen in vielen Teilen des Maschinenbaus zur Anwendung. Sie eignen sich aufgrund ihrer Spielfreiheit besonders für dynamische Belastungen [17]. Außerdem zeichnen sie sich durch geringe Bearbeitungszeiten und Fertigungskosten aus und stellen deshalb eine gute Alternative zu formschlüssigen Welle-Nabe-Verbindungen dar.

Torsionsmomente und Axialkräfte werden bei Pressverbindungen durch die Reibkräfte übertragen, welche sich infolge des Fugendrucks und der Reibungszahl in der Kontaktzone bilden. Die Höhe des Fugendrucks bei Pressverbindungen hängt vom Übermaß ab, der Differenz aus dem Außendurchmesser der Welle und dem Innendurchmesser der Nabe. Während bei Zylinder-Pressverbindungen das Übermaß bei der Fertigung entsteht, kann es bei Kegel-Pressverbindungen durch Längsaufpressen beliebig variiert werden. Für letztere sei auf [46], [47] verwiesen.

Bei der Übertragung von Biegemomenten in Zylinderpressverbindungen kann es zu einer Relativbewegung zwischen Welle und Nabe in axialer Richtung kommen. Diese wird als örtliches Gleiten bezeichnet [22]. Durch diese Schlupfvorgänge entsteht Reibkorrosion, welche das äußere Kennzeichen einer tribologischen Zusatzbeanspruchung ist. Sie ist gekennzeichnet durch Oberflächenverschleiß, lokale Korrosionspartikelanhäufungen und innere Transportvorgänge, die zu zeitlich nichtlinearen Beanspruchungsumlagerungen führen. Verbunden damit ist im Allgemeinen eine Verringerung der Tragfähigkeit [40]. Die besondere Gefahr daraus resultierender sog. Reiberermüdungs- bzw. Reibdauerbrüche besteht darin, dass diese auch nach mehr als 10^8 Lastwechseln, also oberhalb klassischer Dauerfestigkeitsgrenzen, festgestellt werden. Durch die Anordnung einer Pressverbindung auf einem Wellenabsatz und optimaler Abstimmung der Parameter Fugendurchmesser D_F zu Wellendurchmesser d , Fugendurchmesser D_F zu Hohlkehlenradius ρ und Nabenüberstand δ können sowohl Reibdauerbrüche im Pressverbindungsbereich als auch Dauerbrüche im Verbindungsbereich von Fugendurchmesser zu Wellendurchmesser vermieden werden [18].

Die geometrischen Abmaße und Parameter der Pressverbindungen sind bekannt (Kap. 4.1). Von GROPP durchgeführte Versuche mit diesen Verbindungen weisen

Passungsrost im Bereich des Fugenbeginns auf [20]. Deshalb sind eine Betrachtung des Vorganges der Reibdauerbeanspruchung sowie der zugehörigen Beurteilungskriterien im Rahmen der Arbeit notwendig.

Zur Beurteilung von Welle-Nabe-Verbindungen stehen die DIN-Vorschriften DIN 7190 und DIN 743 zur Verfügung. Auf deren Grundlage sollen Entwurfsberechnungen für die Pressverbindung durchgeführt werden.

Eine Betrachtung der Verbindung für Elasto-Plastizität ist analytisch nicht möglich. Ziel ist es deshalb, mittels der Methode der finiten Elemente (FEM) das Verhalten von Pressverbindungen im Pressverbindungsgebiet nahe dem Übergangsbereich (Hohlkehlenradius) zu untersuchen. Eventuelle Abhängigkeiten von Nabenüberstand und Nabenunterstand sollen ermittelt und miteinander verglichen werden. Die Untersuchungen werden auf den gefügten Zustand ohne äußere Belastung und für Biegemomentbelastung beschränkt. Im ersten Schritt erfolgt die Berechnung an einem rotationssymmetrischen Modell. Danach wird dieses derart erweitert, dass auch nicht rotationssymmetrische Belastungen (Biegung) simuliert werden können. Schließlich werden die erhaltenen Ergebnisse mit den Entwurfsberechnungen und den Versuchen verglichen und beurteilt.

Kapitel 2

Grundlagen

Zum Verständnis der folgenden Abschnitte sind einige mathematische und kontinuumsmechanische Grundlagen notwendig, welche hier kurz zusammengefasst werden sollen. Detailliertere Erläuterungen können beispielsweise [7], [23], [27], [15] und [16] entnommen werden.

2.1 Mathematische Hilfsmittel

Um komplizierte Zusammenhänge kompakt darstellen zu können, kommt das Tensorkalkül zur Anwendung. Es wird vereinbart, dass der zu einem beliebigen Tensor \mathbf{A} gehörige transponierte Tensor durch \mathbf{A}^T und der inverse Tensor durch \mathbf{A}^{-1} dargestellt werden. Weiterhin gilt die Regel, dass bei der Summation über Indizes, die innerhalb eines Terms paarweise auftreten, das Summenzeichen weggelassen werden kann (EINSTEINSche Summationskonvention). Für die Vorschriften der Tensorrechnung sei an dieser Stelle auf [27] und [7] verwiesen.

Falls ein Tensor von Ortskoordinaten abhängige Tensorkoordinaten besitzt, liegt ein stationäres Tensorfeld vor. Bei zusätzlicher Abhängigkeit von der Zeit t wird das Tensorfeld als instationär bezeichnet. Partielle Ableitungen eines Tensorfeldes nach dessen Ortskoordinaten werden im Weiteren durch Komma gekennzeichnet. Den Gradienten eines Tensorfeldes \mathbf{A} erhält man durch tensorielle Multiplikation der Ableitung von \mathbf{A} nach den Ortskoordinaten x_k mit den Basisvektoren \mathbf{e}_k .

$$\begin{aligned} \mathit{grad} \mathbf{A} &= \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k &= \mathbf{A}_{ij,k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{B}_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \end{aligned} \tag{2.1}$$

Das Beispiel für ein zweistufiges Tensorfeld \mathbf{A} (2.1) zeigt, dass die Bildung des Gradienten zu einem Tensorfeld \mathbf{B} mit einer um eins höheren Stufe führt.

Mit Hilfe des NABLA-Operators $\underline{\nabla}$, eines invarianten, partiellen Ableitungsoperators mit Vektorcharakter

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} () \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

kann der Gradient eines Tensors durch ein Tensorprodukt ersetzt werden.

$$\text{grad } \mathbf{A}_{(n)} = \mathbf{A}_{(n)} \otimes \underline{\nabla} \quad (2.3)$$

Bei skalarer Multiplikation eines Tensors mit dem NABLA-Operator entsteht ein um eine Stufe niedrigerer Tensor.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \underline{\nabla} &= A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= A_{ij,k} \delta_{jk} \mathbf{e}_i \\ &= A_{ij,j} \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dabei stellt δ das Kronecker-Symbol dar, welches wie folgt definiert ist:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

Der LAPLACE-Operator Δ ist ein Differentialoperator, welcher die Summe der reinen zweiten Ableitungen einer Funktion darstellt. Für den ebenen Fall ist dies in (2.6) beispielhaft gezeigt.

$$\begin{aligned} \Delta() &= ()_{,11} + ()_{,22} \\ &= ()_{,kk} && \text{für } k = 1, 2 \\ \Delta\Delta() &= [()_{,11} + ()_{,22}]_{,11} + [()_{,11} + ()_{,22}]_{,22} \\ &= ()_{,kkll} && \text{für } k, l = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2 Elastizitätstheorie

Bei Anwendung des Schnittprinzips an einem belasteten Körper \mathcal{K} wird in jedem Punkt \mathbf{x} der Schnittfläche A ein Spannungsvektor \mathbf{t} freigelegt. Dabei muss für die beiden Teilkörper das Gleichgewicht erfüllt sein. Senkrecht auf dem zugehörigen Flächenelement dA steht der Normalenvektor \mathbf{n} . Multipliziert mit dem zweistufigen CAUCHYSchen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ergibt er den Spannungsvektor \mathbf{t} in der CAUCHYSchen Formel

$$t_i = \sigma_{ji} n_j, \quad (2.7)$$

wobei der CAUCHYSche Spannungstensor auf Grund des Drehimpulssatzes symmetrisch ist.

Aus dem Impulssatz folgen für quasistatische Vorgänge die so genannten Gleichgewichtsbedingungen oder Differentialgleichungen für das Gleichgewicht

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\nabla} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Der Ausgangszustand K_0 und der Momentanzustand K eines Körpers sind in Abb. 2.1 dargestellt. Die Abbildung in den dreidimensionalen EUKLIDischen Raum wird als Konfiguration bezeichnet.

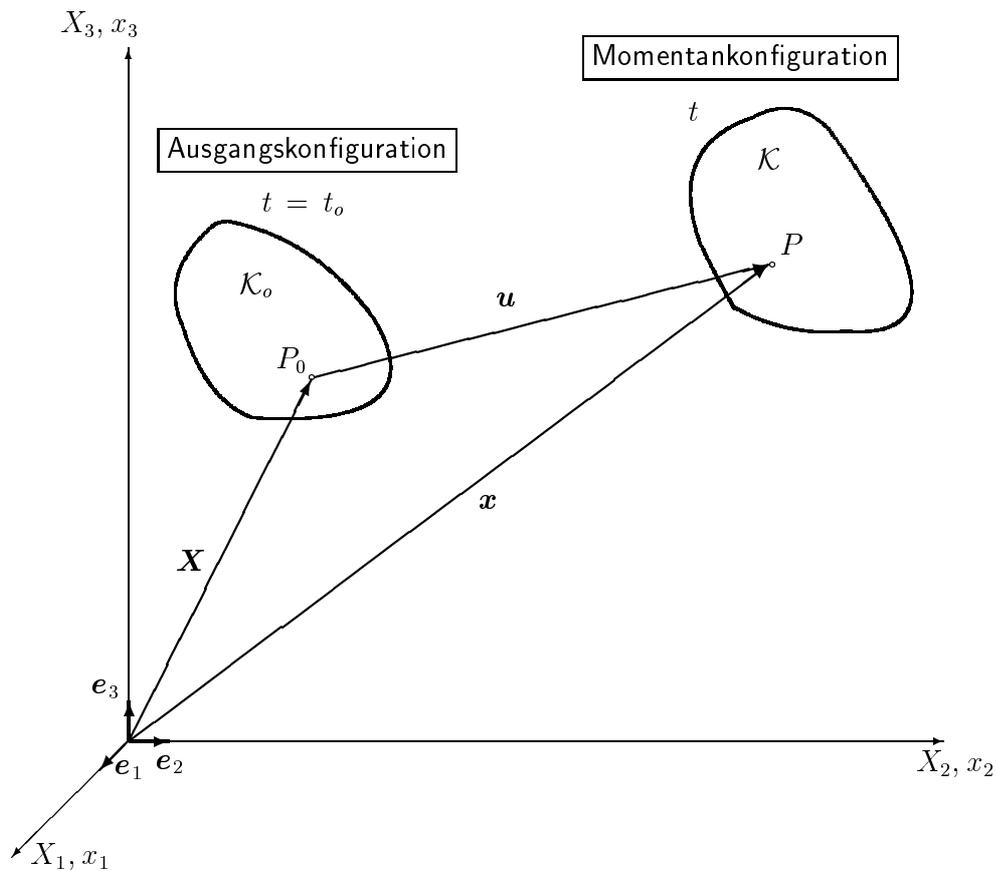


Abb. 2.1: Ausgangs- und Momentankonfiguration eines Körpers

In der Ausgangskonfiguration beschreibt die materielle oder LANGRANGESche Koordinate \mathbf{X} die Position des materiellen Punktes P_0 zum Zeitpunkt $t = t_0$, während dessen die räumliche oder EULERSche Koordinate \mathbf{x} die Position des materiellen Punktes zur Zeit t in der Momentankonfiguration kennzeichnet. Den Zusammenhang zwischen den Koordinaten stellt das Bewegungsgesetz

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.9)$$

her.

Eine äquivalente Beschreibung der Bewegung ist durch den Verschiebungsvektor \mathbf{u} möglich.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.10)$$

Falls eine Starrkörperbewegung vorliegt, ändern sich während der Bewegung die Abstände der Teilchen untereinander nicht. Ändern sich die Abstände unmittelbar benachbarter Teilchen, so spricht man von Verzerrung. Für kleine Verschiebungen und kleine Verschiebungsgradienten $u_{i,j}$ können diese durch den linearen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ ausgedrückt werden. Die Koordinaten von $\boldsymbol{\varepsilon}$ ergeben sich zu

$$\varepsilon_{ij}(x_k, t) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.11)$$

In der Aufgabenstellung sind metallische Werkstoffe als Material für die Pressverbindung vorgegeben. Diese besitzen in guter Näherung richtungsunabhängige mechanische und thermische Eigenschaften.

Für den zweistufigen Wärmeausdehnungstensor $\boldsymbol{\alpha}$ gilt demzufolge, dass er in jedem orthonormierten Basissystem die gleichen Koordinaten besitzt und demzufolge isotrop ist. Analog gilt auch für den vierstufigen Elastizitätstensor \mathbf{E} Isotropie. Beide enthalten deshalb zusammen nur drei ortsunabhängige Materialkonstanten. Dies sind das Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν , die den Gleitmodul $G = E/2(1 + \nu)$ ergeben sowie der Wärmeausdehnungskoeffizient α .

Für das Vorhandensein von technischer Elastizität müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Bei Wegnahme der Belastung wird der spannungslose, verzerrungsfreie Ausgangszustand eingenommen.
- Die Geschwindigkeit der Belastung hat keinen Einfluss.
- Der Weg der Belastung hat keinen Einfluss.
- Die Be- und Entlastung verlaufen im einachsigen Spannungszustand auf der gleichen Kurve.

Zwischen den Spannungen und den Verzerrungen existieren somit umkehrbar eindeutige Beziehungen. Für den isothermen Fall lautet die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung bei linearer Elastizität

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.12)$$

Bei Vorhandensein einer geringen Temperaturänderung $\vartheta = T - T_0$ mit T als aktueller und T_0 als Ausgangstemperatur treten zusätzlich Wärmedehnungen auf.

$$\varepsilon_{ij}^{\vartheta} = \alpha_{ij} \vartheta \quad (2.13)$$

Liegen Ortsunabhängigkeit von $\boldsymbol{\alpha}$ und ein homogenes Temperaturfeld ϑ vor, können sich die Wärmedehnungen frei ausbilden und erzeugen keine Wärmespannungen.

Die Gesamtverzerrungen ergeben sich dann additiv aus den thermischen und elastischen Anteilen.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\vartheta + \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma \quad (2.14)$$

Damit erweitert sich die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (2.12) zu

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \vartheta \quad (2.15)$$

mit

$$\beta_{ij} = E_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (2.16)$$

Auf Grund der thermischen und mechanischen Isotropie lassen sich \mathbf{E} und $\boldsymbol{\beta}$ wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} E_{ijkl} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \\ \beta_{ij} &= \frac{E \alpha}{1-2\nu} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Werden diese in die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (2.15) eingesetzt, erhält man

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{E \alpha}{1-2\nu} \delta_{ij} \vartheta \quad (2.18)$$

Bei Auflösung nach $\boldsymbol{\varepsilon}$ ergibt sich folgende Beziehung:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu) \sigma_{ij} - (\nu \sigma_{kk} - E \alpha \vartheta) \delta_{ij}] \quad (2.19)$$

Die Gleichungen (2.18) und (2.19) werden als verallgemeinertes HOOKEsches Gesetz bezeichnet.

2.3 Analytische Lösung des Randwertproblems

Um das Randwertproblem lösen zu können, müssen die Feldgrößen $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i)$ den folgenden Feldgleichungen genügen:

- Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_{ij,j} + \varrho f_i = 0 \quad \forall \underline{x} \in V \quad (2.20)$$

- Kinematik

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \forall \underline{x} \in V \quad (2.21)$$

- Deformationsgesetz

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \vartheta \quad \forall \underline{x} \in V \quad (2.22)$$

Dabei ist die Temperaturänderung $\vartheta(\underline{x}, t)$ eine bekannte Größe und die Dichte ϱ wird aufgrund geometrischer Linearität als konstant betrachtet. Zusätzlich müssen die Feldgrößen auf der Oberfläche A des betrachteten Körpers gegebene Randbedingungen erfüllen. Diese können sowohl Spannungsrandbedingungen als auch Verschiebungsrandbedingungen darstellen und lauten

für Spannungsrandbedingungen

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = p_i \quad \forall \underline{x} \in A^\sigma \quad (2.23)$$

für Verschiebungsrandbedingungen

$$u_i = \bar{u}_i \quad \forall \underline{x} \in A^u \quad (2.24)$$

bei gegebenen Randwerten p_i und \bar{u}_i .

Ausschließliches Vorhandensein von Spannungsrandbedingungen wird als Spannungsrandwertproblem bezeichnet. Analog spricht man bei ausschließlichem Auftreten von Verschiebungsrandbedingungen von einem Verschiebungsrandwertproblem. Treten sowohl Spannungs- als auch Verschiebungsrandbedingungen auf, handelt es sich um ein gemischtes Randwertproblem.

Die Randbedingungen müssen bestimmte Bedingungen erfüllen.

- Die Randbedingungen und Volumenkräfte müssen so gegeben sein, dass sowohl die Stetigkeit der Verschiebungen als auch die geometrische Linearität eingehalten werden.
- Bei gemischten Randwertproblemen müssen die Randwerte widerspruchsfrei aufgestellt werden.
- Beim Spannungsrandwertproblem dürfen Randspannungen und Volumenkräfte das globale Gleichgewicht nicht verletzen.

2.3.1 Ebener Spannungszustand

Ein ebener Spannungszustand (ESZ) entsteht näherungsweise in dünnwandigen Bauteilen, z.B. Scheiben. Scheiben zeichnen sich durch eine ebene Mittelfläche und eine konstante oder schwach veränderliche Dicke h aus. Diese soll wesentlich kleiner als alle übrigen Abmessungen der Scheibe sein. Die Belastung liegt in der Mittelfläche, welche im Weiteren in der Ebene $x_3 = 0$ angeordnet wird. Die Spannungen sind derart definiert, dass sie nur in der Scheibenebene auftreten und unveränderlich über die Scheibendicke sind. In ebenen kartesischen Koordinaten ist der ebene Spannungszustand durch folgende Komponenten charakterisiert:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \sigma_{11}(x_1, x_2) \\
 \sigma_{22} &= \sigma_{22}(x_1, x_2) \\
 \sigma_{12} &= \sigma_{12}(x_1, x_2) \\
 \sigma_{33} &= \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Im Allgemeinen ist ein solcher Spannungszustand geometrisch nicht verträglich (siehe [27], [15]), stellt jedoch eine Näherung mit genügender Genauigkeit dar.

Die Gleichgewichtsbedingungen (2.20) reduzieren sich auf

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \varrho f_i &= 0 \\
 \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \varrho f_i &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

Das verallgemeinerte HOOKEsche Gesetz (2.19) vereinfacht sich aufgrund (2.25) zu

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) + \alpha \vartheta \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) + \alpha \vartheta \\
 \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha \vartheta \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2G} \\
 \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{13} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Bei Anwendung des ESZ auf die Kinematik (2.21) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} &= 0 \\
 \varepsilon_{33,22} &= 0 \\
 \varepsilon_{33,11} &= 0 \\
 \varepsilon_{33,12} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Im Folgenden wird die AIRYSche Spannungsfunktion $F = F(x_1, x_2)$ eingeführt. Lassen sich die Spannungen aus dieser Funktion zu

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= F_{,22} \\ \sigma_{22} &= F_{,11} \\ \sigma_{12} &= -F_{,12} - \varrho f_1 x_2 - \varrho f_2 x_1\end{aligned}\tag{2.29}$$

ableiten, ist das Gleichgewicht (2.26) identisch erfüllt.

Einsetzen des HOOKESchen Gesetzes (2.27) in die erste Gleichung von (2.29) unter Berücksichtigung der Kinematik (2.28) und anschließendes Zusammenfassen liefert

$$F_{,1111} + 2 F_{,1122} + F_{,2222} + \alpha E (\vartheta_{,11} + \vartheta_{,22}) = 0\tag{2.30}$$

Mit Hilfe des LAPLACE-Operators ist eine kompakte Darstellung von (2.30) möglich.

$$\begin{aligned}\Delta\Delta F &= -\alpha E \Delta \vartheta \\ \Delta\Delta F &= 0 \quad \text{für } \Delta \vartheta = 0\end{aligned}\tag{2.31}$$

2.3.2 Axialsymmetrie

Ist das zu betrachtende Bauteil bezüglich einer Achse rotationssymmetrisch und genügt auch die Belastung dieser Bedingung, so liegt axiale Symmetrie vor. Dabei sollen die Volumenkräfte auch hier außer Acht gelassen werden. Zur einfacheren Beschreibung des kontinuumsmechanischen Problems eignet sich eine Umrechnung der kartesischen Koordinaten (x, y, z) in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , wobei hier die z-Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt.

Die Gleichgewichtsbedingungen (2.26) lauten in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r} \sigma_{r\varphi,\varphi} + \sigma_{rz,z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \varrho f_r &= 0 \\ \sigma_{r\varphi,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\varphi\varphi,\varphi} + \sigma_{\varphi z,z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} + \varrho f_\varphi &= 0 \\ \sigma_{rz,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\varphi z,\varphi} + \sigma_{zz,z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \varrho f_z &= 0\end{aligned}\tag{2.32}$$

und die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen (2.21)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= u_{r,r} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} u_{\varphi,\varphi} \\ \varepsilon_{zz} &= u_{z,z} \\ \gamma_{r\varphi} = 2 \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{r} u_{r,\varphi} + u_{\varphi,r} - \frac{u_\varphi}{r} \\ \gamma_{\varphi z} = 2 \varepsilon_{\varphi z} &= u_{\varphi,z} + \frac{1}{r} u_{z,\varphi} \\ \gamma_{rz} = 2 \varepsilon_{rz} &= u_{r,z} + u_{z,r}\end{aligned}\tag{2.33}$$

Jede Meridianebene, d.h. jeder Schnitt für $\varphi = \text{konst.}$, stellt einen Symmetrieschnitt dar. Somit sind sämtliche auftretenden Größen von φ unabhängig. Für die Belastungs- und Verschiebungskomponenten gilt somit

$$\begin{aligned}
 p_r &= p_r(r, z) \\
 p_\varphi &= 0 \\
 p_z &= p_z(r, z) \\
 \\
 f_r &= f_r(r, z) \\
 f_\varphi &= 0 \\
 f_z &= f_z(r, z) \\
 \\
 \vartheta &= \vartheta(r, z) \\
 \\
 u_r &= u_r(r, z) \\
 u_\varphi &= 0 \\
 u_z &= u_z(r, z)
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Damit vereinfacht sich die Kinematik (2.33) zu

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= u_{r,r} \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r} \\
 \varepsilon_{zz} &= u_{z,z} \\
 \varepsilon_{r\varphi} &= 0 \\
 \varepsilon_{\varphi z} &= 0 \\
 \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} (u_{r,z} + u_{z,r})
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Aus $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = 0$ resultiert unter der Annahme von Isotropie auch $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0$. Deswegen und aufgrund der Unabhängigkeit der Größen von φ sind sämtliche Ableitungen nach φ identisch Null erfüllt. Damit reduzieren sich die Gleichgewichtsbedingungen (2.32) zu

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \varrho f_r &= 0 \\
 \sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \varrho f_z &= 0
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Für den Fall des Ebenen Spannungszustandes bei Axialsymmetrie ändert sich (2.34) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 p_r &= p_r(r) \\
 p_z &= p_z(r) \\
 f_r &= f_r(r) \\
 f_z &= 0 \\
 \vartheta &= \vartheta(r) \\
 u_r &= u_r(r) \\
 u_z &= u_z(r, z)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Die Verschiebung in radialer Richtung u_r hängt nur von r ab, wodurch die Verzerrungen ε_{rr} und $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ über der Scheibendicke konstant sind.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}(r) &= u_{r,r} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}(r) &= \frac{u_r}{r}\end{aligned}\tag{2.38}$$

Da der Spannungstensor nur noch die Hauptspannungen σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ enthält, reduzieren sich die Gleichgewichtsbedingungen (2.36) auf

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \varrho f_r = 0\tag{2.39}$$

Durch Tauschen der Indizes in den Gleichungen zur Berechnung der Hauptdehnungen (2.27) gegen Zylinderkoordinaten, Auflösen nach den Spannungen und Einsetzen der Dehnungen aus (2.38) erhält man Gleichungen zur Berechnung der Hauptspannungen σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in Abhängigkeit der vorgegebenen radialen Verschiebungen u_r .

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(u_{r,r} + \nu \frac{u_r}{r} \right) - \frac{E \alpha}{1-\nu} \vartheta \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u_r}{r} + \nu u_{r,r} \right) - \frac{E \alpha}{1-\nu} \vartheta\end{aligned}\tag{2.40}$$

Die Anwendung von (2.40) auf (2.39) liefert eine gewöhnliche Differentialgleichung für die radiale Verschiebungskomponente u_r .

$$u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} - (1+\nu) \alpha \vartheta_{,r} + \frac{1-\nu^2}{E} \varrho f_r = 0\tag{2.41}$$

Diese Lösung lässt sich in eine kompaktere Form zusammenfassen.

$$\left[\frac{1}{r} (r u_r)_{,r} \right]_{,r} = (1+\nu) \alpha \vartheta_{,r} + \frac{1-\nu^2}{E} \varrho f_r\tag{2.42}$$

2.4 Plastizitätstheorie

Im Folgenden soll kurz auf die für die Arbeit relevante Fließbedingung eingegangen werden. Umfassendere Ausführungen zur Plastizitätstheorie finden sich u.a. in [28]. Die Vorgänge werden für den isothermen Fall betrachtet. Somit besteht keine Abhängigkeit von der Temperaturänderung ϑ .

Plastisches Materialverhalten tritt bei Überschreiten der Elastizitätsgrenze auf. Im Spannungsraum bilden alle Spannungspunkte σ_{ij} des CAUCHYschen Spannungstensors eine fünfdimensionale Hyperfläche, die als Fließfläche bezeichnet wird und

den Fließkörper einschließt. Die Beschreibung der Fließfläche erfolgt durch eine skalarwertige Funktion $f(\boldsymbol{\sigma})$, die als Fließbedingung bezeichnet wird:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.43)$$

Für den elastischen Bereich liegen die Spannungspunkte innerhalb der Fließfläche, es gilt $f < 0$. Bei $f = 0$ liegt der Spannungspunkt an der Elastizitätsgrenze. Im Rahmen skleronomer Plastizität kann die Fließbedingung nicht größer Null werden.

Für idealplastisches Materialverhalten ändert sich die Form der Fließfläche und damit die Fließbedingung nicht. Bei Verfestigung kommt es zur Änderung der Fließflächenform. Die Fließbedingung hängt dann von zusätzlichen Parametern, den inneren Variablen, ab. Diese sind skalare und/oder tensorielle Größen und dienen zur Erfassung der Belastungsgeschichte.

$$f(\boldsymbol{\sigma}, h^{(k)} \dots) = 0 \quad (2.44)$$

Für isotropes Materialverhalten wird häufig die Fließbedingung nach MISES [33] genutzt.

$$\begin{aligned} f_M(\boldsymbol{\sigma}) &\equiv \frac{1}{2} \left[(\sigma^{11} - \sigma^{22})^2 + (\sigma^{22} - \sigma^{33})^2 + (\sigma^{33} - \sigma^{11})^2 \right] \\ &\quad + 3 \left[(\sigma^{12})^2 + (\sigma^{23})^2 + (\sigma^{13})^2 \right] - \sigma_F^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dabei stellt σ_F die Fließspannung dar und ist für Zug und Druck betragsmäßig gleich groß. Im Hauptspannungsraum ist die MISESsche Fließfläche ein Kreiszylinder, dessen Achse mit der Raumdiagonalen zusammenfällt. Der Radius des Zylinders R_M errechnet sich nach

$$R_M = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_F \quad (2.46)$$

2.5 Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Element-Methode FEM stellt ein gängiges Mittel zur Lösung von ingenieurtechnischen Aufgaben mit Hilfe von moderner Rechentechnik dar. Der klassische Weg besteht darin, das Problem in ein möglichst einfaches Modell zu überführen und analytisch zu berechnen. Insbesondere bei mehrdimensionalen Aufgaben ist dies nur in Ausnahmefällen möglich. Aus diesem Grund ist es heutzutage üblich, die problembeschreibende Differentialgleichung mit Hilfe von Näherungsverfahren zu lösen. Dafür existieren verschiedene Ansätze, beispielsweise die Methode der gewichteten Residuen, die Differenzenmethode und das RITZsche Verfahren.

Die FEM stellt ebenfalls ein näherungsweise Verfahren dar. Dafür wird das zu untersuchende Gebiet in endlich kleine Elemente aufgeteilt. Diesen werden Ansatzfunktionen für die Verschiebungen zugeordnet, welche an den Elementgrenzen stetig sind. Die Formulierung der Ansatzfunktionen auf Elementebene erfolgt meist durch Polynome. Jedem Element wird dabei ein lokales Koordinatensystem zugeordnet. Für das Verschiebungsfeld eines Elementes $\overset{e}{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ ergibt sich

$$\overset{e}{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \overset{e}{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \overset{e}{\mathbf{u}} \quad (2.47)$$

Dabei stellen $\overset{e}{\mathbf{G}}$ die Matrix der Formfunktionen und $\overset{e}{\mathbf{u}}$ die Verschiebungskomponenten dar. Die folgenden Schritte basieren auf dem RITZschen Verfahren und sind in [27] zu finden.

Durch Variation der Ansatzfreiwerte $\overset{e}{\mathbf{u}}$ entstehen im Element die virtuellen Verschiebungen

$$\delta \overset{e}{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \overset{e}{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \delta \overset{e}{\mathbf{u}} \quad (2.48)$$

Durch Anwendung der Differentialmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} ()_{,1} & 0 & 0 \\ 0 & ()_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & ()_{,3} \\ ()_{,2} & ()_{,1} & 0 \\ 0 & ()_{,3} & ()_{,2} \\ ()_{,3} & 0 & ()_{,1} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

auf (2.48) ergeben sich die virtuellen Verzerrungen $\delta \overset{e}{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned} \delta \overset{e}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{D} \overset{e}{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \delta \overset{e}{\mathbf{u}} \\ &= \overset{e}{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \delta \overset{e}{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

und damit das Verzerrungsfeld des Elementes

$$\overset{e}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \overset{e}{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \overset{e}{\mathbf{u}}. \quad (2.51)$$

Bei Isotropie im isothermen Fall liefert die Anwendung von (2.51) auf die Spannungs-Dehnungs-Beziehung (2.12) die Elementspannungen

$$\overset{e}{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \overset{e}{\mathbf{E}} \overset{e}{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \overset{e}{\mathbf{u}} \quad (2.52)$$

Das Einsetzen der Elastizitätsbeziehung (2.52) in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \varrho \mathbf{f} \delta \mathbf{u} dV - \int_{A^\sigma} \mathbf{p} \delta \mathbf{u} dA = 0 \quad (2.53)$$

führt zur FEM-Gleichung für ein Element

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \quad (2.54)$$

mit der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{E} \mathbf{B}(\mathbf{x}) dV \quad (2.55)$$

und dem Elementbelastungsvektor

$$\mathbf{f}^e = \int_V \varrho \mathbf{G}^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV + \int_{A^\sigma} \mathbf{G}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}) dA. \quad (2.56)$$

Nach Transformation der lokalen Koordianten in globale Koordinaten und Vereinigung aller Elementlösungen

$$\bigcup_n \left(\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \right) = \bigcup_n \mathbf{f}^e \quad (2.57)$$

erhält man die FEM-Grundgleichung für das gesamte Gebiet mit der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} , der Spaltenmatrix der Knotenverschiebungskomponenten \mathbf{u} und der Spaltenmatrix der Knotenkraftkomponenten \mathbf{f} .

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.58)$$

Diese Beziehung gilt bei linear-elastischem Materialverhalten für kleine Verschiebungen. Treten hingegen große Verschiebungen (geometrische Nichtlinearität) oder nichtlineares Materialverhalten auf, so ist eine inkrementelle Betrachtung erforderlich. Dafür sind Kenntnisse über die Belastungsgeschichte notwendig.

Kapitel 3

Reibdauerbeanspruchung

Treten infolge instationärer Belastungen örtlich zyklische Schlupfbewegungen in der Pressungsfuge auf, können Schäden durch Reibkorrosion entstehen. Verbunden ist dies mit einem scheinbar unkontrolliertem Schädigungswachstum. Grund dafür ist, dass die den Bruch auslösenden Anrisse im Kontaktbereich entstehen und somit von außen nicht sichtbar sind. Allein das Austreten von Verschleißpartikeln aus der Kontaktzone heraus, auch Passungsrost genannt, ist oft der einzige Hinweis auf den Reibkorrosionsprozess.

3.1 Entstehung und Auswirkung von Reibkorrosion

Die Bezeichnung Reibkorrosion wird nach DIN 50900 [12] als der Vorgang bezeichnet, bei welchem Korrosion und schwingende Gleitreibungen zwischen zwei im Kontakt befindlichen schwingenden Oberflächen beteiligt sind.

Wegen der Oberflächenrauigkeit von Welle und Nabe findet bereits während des Fügevorganges aufgrund des wachsenden Fugendruckes eine plastische Deformation der sich berührenden Rauigkeitsspitzen statt. Teilweise brechen diese ab und erste lose Partikel entstehen. Diese Glättungsvorgänge führen örtlich zu einer Verringerung der Flächenpressung [40]. Kommt es im Belastungsfall zu oszillierenden Schlupfbewegungen in der Pressungsfuge, lösen sich weitere Partikel aus den Grundwerkstoffen der sich berührenden Tribopartner ab. Die wirksamen Verschleißmechanismen für die Partikelbildung sind in [8] detailliert beschrieben. Dazu gehören insbesondere:

- **Abrasion:** Harte Verschleißpartikel wirken im Kontaktgebiet ähnlich Schleifkörpern, führen zum sog. Mikrospanen und Mikrobrechen und können so abrasiven Verschleiß verursachen.
- **Oberflächenzerrüttung:** Findet durch die reversierende Gleitbewegung eine "mikropflügende Beanspruchung" statt, so ist durch die vorhandenen Verschleißpartikel ein abrasiver Abtrag möglich.

- **Adhäsion:** Infolge punktuell hoher Reibbeanspruchungen entstehen Kaltverschweißungen, wenn die schützenden Deck- bzw. Oxidschichten aufgebrochen werden. Teile des Grundmaterials werden dadurch abgetrennt und wirken in der Folge als Verschleißpartikel.
- **Tribochemische Reaktion:** In den Mikrokontakten werden durch mechanische und thermische Aktivierung chemische Reaktionen begünstigt. Die sich hierbei bildenden Oxidschichten brechen im Betrieb auf und führen zu Korrosionsprodukten.

Zu Beginn können sich die wenigen Verschleißpartikel in den durch die Rauigkeit vorhandenen Hohlräume einlagern. Mit Zunahme der entstehenden Reibkorrosionsprodukte bildet sich eine lokale Zwischenschicht, welche dazu führen kann, dass sich Welle und Nabe nicht mehr direkt berühren. Dies wird auch als sog. tribologisches Drei-Körper-System [8] bezeichnet.

3.2 Einfluss der Reibkorrosion auf das Festigkeitsverhalten

Die durch den abrasiven und adhäsiven Materialabtrag gebildeten Verschleißpartikel unterliegen Transportbewegungen innerhalb des Kontaktbereiches. Äußeres Anzeichen dafür ist der Austritt des Passungsrostes aus der Verbindung, auch Bluten genannt. Innerhalb der Verbindung entstehen ungleichmäßige Partikelverteilungen, welche zu lokalen Passmaßverlusten oder örtlichen Partikelanhäufungen führen. Die Folge sind Beanspruchungsumlagerungen und nichtlineare Veränderungen des weiteren Verschleiß- und Schädigungsverlaufes. Auf die Bewertung und Berechnung dieser Verläufe wird in einer Vielzahl von Arbeiten, u.a. [17], [18], [19], [22], [25], [29], [40], eingegangen.

Eine anschauliche Erklärung in Bezug auf die Bedeutung des reibbedingten Verschleißes für das Festigkeitsverhalten liefern VINGSBO und SÖDERBERG in [50]. Darin wird auf den Zusammenhang zwischen der Schlupfamplitude \hat{s} und der in der Tribologie häufig verwendeten Verschleißrate K_v sowie der Zahl der Schwingspiele bis zur Reibermüdung N_{ertr} eingegangen. Die Verschleißrate K_v stellt das Verhältnis aus dem gemessenen Verschleißvolumen W_V zu den Beanspruchungsparametern F_N (Normalkraft) und s (Gleitweg) dar (3.1).

$$K_V = \frac{W_V}{F_N \cdot s} \quad (3.1)$$

Die Abhängigkeit von K_v und N_{ertr} von der Schlupfamplitude \hat{s} ist nichtlinearer Art. Im Bereich des partiellen Schlupfes mit kleiner Amplitude (ca. 2-20 μm) fällt N_{ertr} mit steigendem \hat{s} stark ab. Reibkorrosionsbedingte Oberflächenschädigungen werden durch eine wachsende Verschleißrate gekennzeichnet. Bei zunehmender Beanspruchung durch große Schlupfamplituden (ca. 20-300 μm) steigt K_v stark an und

führt dazu, dass gebildete Anrisse teilweise wieder abgetragen werden. Als Folge wird der Rissfortschritt verzögert, was zu einem Ansteigen der Ermüdungslastspielzahl und damit zur Erhöhung der Tragfähigkeit führt. Das Verhalten bei großen Relativbewegungen bei Schlupfamplituden größer $300 \mu m$, auch reversierendes Gleiten genannt, kann nach [50] mit Gleitverschleiß infolge gleichbleibender Bewegungsrichtung verglichen werden.

Eine Verringerung der Schlupfamplitude sowie des Schlupfes gegen Null ist deswegen anzustreben. Dies belegen u.a. zahlreiche Untersuchungen nach GROPP [17], [18], [19]. Maßgebende Parameter dafür sind der Fugendruck p sowie der Haftbeiwert μ , aus denen sich die Reibschubspannung τ ergibt (3.2).

$$\tau = p \cdot \mu \quad (3.2)$$

Demnach sind im Falle von Wechsel- bzw. Umlaufbiegung Maßnahmen zur Fugendruckverminderung, z.B. Entlastungskerbten im Bereich der Nabenkante, zu vermeiden.

3.3 Berechnungskonzepte

3.3.1 Nennspannungskonzepte

Nennspannungskonzepte gehören aufgrund ihrer einfachen Handhabung zu den am häufigsten eingesetzten Berechnungsmethoden. Sie sind beispielsweise ein fester Bestandteil der DIN 743 [10] und stellen eine Richtlinie zum rechnerischen Festigkeitsnachweis dar. Als Bewertungsgrundlage dient dabei der Vergleich der durch die Belastung hervorgerufenen Nennspannungsamplitude $\sigma_{a,n}$ mit der für die jeweilige Mittelspannung $\sigma_{m,n}$ zulässigen Nennausschlagsspannung σ_{AK} des Bauteils. Die zulässigen Nennausschlagsspannungen werden mit Hilfe sog. Kerbwirkungszahlen $\beta_k(K_f)$ bestimmt, welche meist durch Experimente ermittelt wurden. Die Kerbwirkungszahlen gelten allerdings ausschließlich für den Ort an der Nabenkante. Da sich der für die Reibdauerbeanspruchung maßgebende Ort aber meist ein Stück innerhalb der Kontaktzone befindet [18], [19], [29], kann die Aussagegüte herabgesetzt werden. Eine Berechnung nach DIN 743 wird im Rahmen dieser Arbeit (Kap. 4.4) durchgeführt.

3.3.2 Konzept nach Leidich

Als Grundlage für dieses Konzept dient das Kriterium von FUNK [14], welches besagt, dass das Produkt aus örtlicher Flächenpressung und zugehöriger Relativverschiebung einen bestimmten Wert nicht überschreiten darf. Dieser sehr einfache Zusammenhang wurde bei Reibkufenversuchen gefunden und ist nicht ohne Weiteres auf andere Geometrien anwendbar.

LEIDICH legt in [29] einen zulässigen Grenzschlupf s_{zul} fest, welcher nach (3.3) berechnet wird.

$$s_{zul} = \frac{100 \frac{N}{mm^2} \cdot (1\dots 1, 5) \mu m}{p} \quad (3.3)$$

Die Fugenpressung von $100 \frac{N}{mm^2}$ und die noch unschädliche Grenzschlupfamplitude $s_g = (1\dots 1, 5) \mu m$ dienen dabei als Bezugsbasis, p stellt die tatsächlich vorhandene Fugenpressung dar. Damit kann der tribologisch zulässige Grenzschlupf $\frac{s_{zul}}{D_F}$ ermittelt werden.

Weiterhin muss das Rutschmoment M_r nach (3.4) ermittelt werden. D_F stellt den Pressfugendurchmesser und l_F die Fugenlänge dar.

$$M_r = \frac{\pi}{2} \cdot D_F^2 \cdot l_F \cdot \mu \cdot p \quad (3.4)$$

Analog zur Drehmomentbelastung ermittelt LEIDICH für Biegemomentbelastung ein Grenzbiegemoment M_{gb} und einen Gütefaktor η_{gb} , welche beide auf den noch unschädlichen relativen Grenzschlupf

$$\left(\frac{s}{D_F} \right) = 2,6 \cdot 10^{-6} \quad (3.5)$$

bezogen sind. Es ist zu beachten, dass sich die Betrachtungen auf Pressverbindungen mit fliegend und beiderseitig gelagerten Wellen sowie verschiedenen Lasteinleitungen erstrecken. Die für die empirische Gleichung (3.6) notwendigen Parameter wurden mit Hilfe der Methode der finiten Elemente ermittelt. Sie sind vom jeweiligen Lastfall abhängig und können [29] entnommen werden.

$$\eta_{gb} = \frac{M_{gb}}{M_r} = A_b \cdot B_b \cdot C_b^{-m_b} \cdot V_b \cdot \left(\frac{l_F}{D_F} \right)^{-n_b} \quad (3.6)$$

Da sich keiner der von LEIDICH betrachteten Lastfälle mit der in der Aufgabenstellung vorgegebenen Geometrie vergleichen lässt, kommt dieses Konzept nicht zur Anwendung.

3.3.3 Ruiz-Chen-Kriterium

Im Zuge von Untersuchungen an Schwalbenschwanzverbindungen fanden RUIZ und CHEN [44] ein empirisches Kriterium für die Vorhersage des Anrissortes der Pressverbindung. Es ist durch das Produkt aus dem Schlupfweg δ und der Reibschubspannung τ definiert und kann als Reibenergie aufgefasst werden. Da für den Rissbeginn und -verlauf aber auch die in der Oberfläche wirkende Zugspannung σ_T in

Richtung des Schlupfes entscheidend ist, wird nach [45] der Parameter FFDP (Fatigue/Fretting Damage Parameter) gebildet (3.7).

$$FFDP = \sigma_T \cdot \tau \cdot \delta \quad (3.7)$$

Es wird davon ausgegangen, dass am potentiellen Anrissort dieser Schädigungsparameter maximal wird. Für verschiedene Anwendungsfälle, in der Regel für die Welle, konnte dies auch erfolgreich bestätigt werden.

Im Allgemeinen werden die Spannungs- und Schlupfberechnung für die unverschlossene Kontur durchgeführt. Die lokalen Effekte auf der Oberfläche werden dabei nicht berücksichtigt. Von Vorteil ist, dass die Zugspannung σ_T sowohl eine statische als auch eine dynamische Beanspruchung darstellen kann.

Für den Fall, dass die Richtung der größten Zugspannung nicht mit der Schlupfrichtung übereinstimmt, beispielsweise bei Überlagerung von Biegung und Torsion, sei auf das erweiterte RUIZ-Kriterium nach [52] verwiesen.

Kapitel 4

Entwurfsberechnung

4.1 Technische Daten der Pressverbindung

Die geometrischen Abmessungen der Pressverbindung sowie die verwendeten Materialpaarungen sind in der Aufgabenstellung vorgegeben.

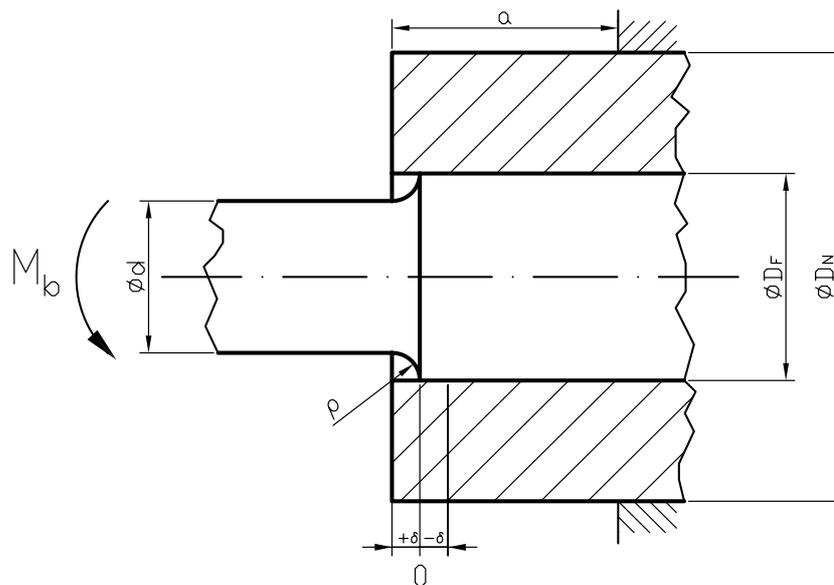


Abb. 4.1: Schnitt der Welle-Nabe-Verbindung

In Abb. 4.1 ist ein schematischer Schnitt durch die Mittelebene der Pressverbindung dargestellt. Die darin gekennzeichneten Größen sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Weitere vorgegebene, nicht in Tabelle 4.1 dargestellte, Werte sind in Tabelle 4.2 aufgeführt.

Größe	Wert	Einheit
D_F	30	mm
D_N	65	mm
d	27,5	mm
ρ	6,79	mm
a	42	mm
δ	2	mm
M_b	200	$\frac{N}{mm^2}$

Tabelle 4.1: Größen zu Abb.4.1

Größe	Wert	Einheit
μ	0,2	-
R_z	3,2	μm

Tabelle 4.2: weitere vorgegebene Werte

Die Pressverbindung wird laut Aufgabenstellung für folgende Materialpaarungen untersucht (Tabelle 4.3).

	Welle	Nabe
Materialpaarung 1	St50-2	St37-2
Materialpaarung 2	42CrMo4	16MnCr5

Tabelle 4.3: verwendete Materialpaarungen

Die für die Berechnungen benötigten Materialparameter der Stähle lauten nach [6] bzw. Aufgabenstellung:

	St 50-2	St 37-2	42CrMo4	16MnCr5
E-Modul in N/mm^2	210000	210000	210000	210000
R_m in N/mm^2	470	340	1100	780
$R_{p0,2}$ in N/mm^2	285	245	900	590
ν	0,3	0,3	0,3	0,3

Tabelle 4.4: Werkstoffkennwerte

Zusätzlich sind für die elastisch-plastischen Berechnungen die Fließkurven der Stähle notwendig. Die Fließkurven der legierten Stähle werden [13] entnommen und durch

das FEM-Programm MARC-MENTAT [34], mit welchem die Rechnungen durchgeführt werden, bereitgestellt.

Da für Baustähle im Allgemeinen keine festen Werte, sondern Bereiche für die Festigkeitskennwerte angegeben sind, können die Fließkurven nicht genau bestimmt werden. [32] stellt aber zumindest näherungsweise Spannungs-Dehnungs-Kurven für einige gängige Baustähle zur Verfügung. Für St50-2 ist diese nicht enthalten. Ersatzweise wird dafür die Spannungs-Dehnungs-Kurve von St52-2 verwendet.

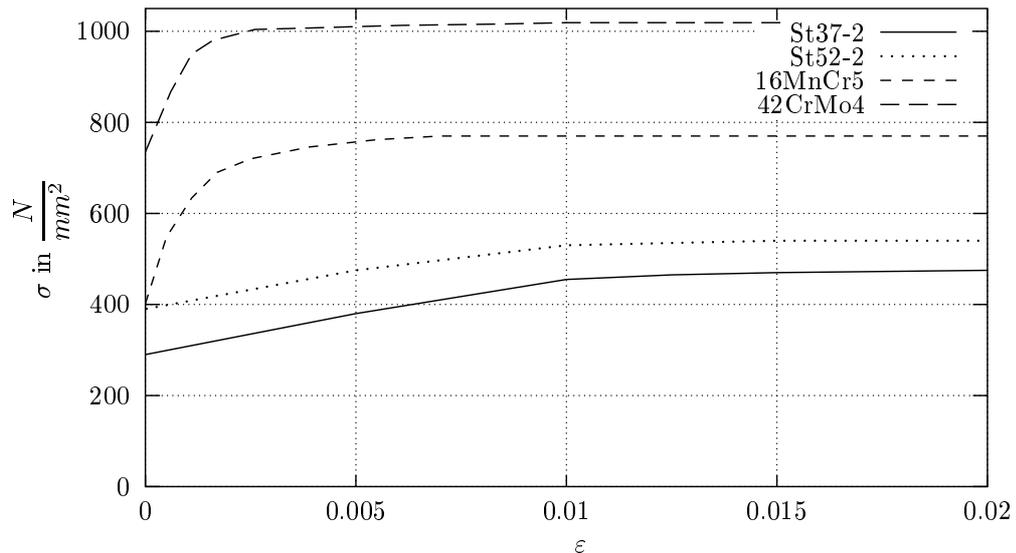


Abb. 4.2: Spannungs-Dehnungs-Kurven der verwendeten Werkstoffe

Sowohl für die kontinuumsmechanische Betrachtung als auch die Entwurfsrechnungen nach DIN 7190 und DIN 743 wird die Querpressverbindung im gefügten Zustand ohne äußere Belastungen zugrunde gelegt. Es wird davon ausgegangen, dass eventuelle beim Fügen entstandene Spannungsunterschiede in Längsrichtung der Verbindung nach dem Fügen ausgeglichen wurden. Die Temperaturverteilung im Pressverband ist homogen.

4.2 Berechnung nach DIN 7190

Seit August 1943 existiert die Norm 7190, welche die Berechnungsgrundlagen für Pressverbände aus metallischen Werkstoffen mit zylindrischen Wirkflächen festlegt. Diese war sehr kompliziert und beinhaltete viele mögliche Rechenfehlerquellen. Deshalb wurde in den siebziger Jahren ein Rechenverfahren für Pressverbände entwickelt und erprobt, nach dem an Hand eines Schemas mit verhältnismäßig geringem Zeitaufwand Pressverbände ausgelegt werden konnten. Die Erkenntnisse wurden in die DIN 7190, Ausgaben 1977-08 und 1981-03, einbezogen. Das bis zur Ausgabe 1981-03 angewandte Rechenverfahren basierte auf den Gleichungen und der Theorie von LUNDBERG [31], welcher die Gestaltänderungsenergiehypothese (Fließbedin-

gung nach v. MISES) für die Ermittlung des plastischen Beanspruchungszustandes verwendet.

Seit der Ausgabe 1988-07 wurde das Rechenverfahren von KOLLMANN [24] und KOLLMANN und ÖNÖZ [25] verwendet. Im Gegensatz zu LUNDBERG gingen sie von der Schubspannungshypothese (modifizierte Fließbedingung nach TRESKA) aus. Die nach diesem Verfahren berechneten Fugendrucke stimmen besser mit den experimentell ermittelten Werten überein und auch die Auslegungsgleichungen sind mathematisch einfacher als die von LUNDBERG. Die Ausgabe 1988-07 wurde überarbeitet, zurückgezogen und durch die aktuell gültige Ausgabe 2001-02 ersetzt.

Die folgenden Berechnungsvorschriften sind der DIN 7190 Ausgabe 2001-02 entnommen, wobei für den in der Aufgabenstellung gegebenen Pressverband nur ein Teil der Norm benötigt und verwendet wird.

4.2.1 Grundlagen

Die Berechnungsvorschriften der Norm sind für Pressverbände mit gleicher konstanter axialer Länge von Innen- und Außenteil (Abb. 4.3) gültig. Sie können näherungsweise für reale Pressverbände angewendet werden, wobei allerdings Spannungsüberhöhungen im Bereich der Nabenkante [29], [30] nicht erfasst werden.

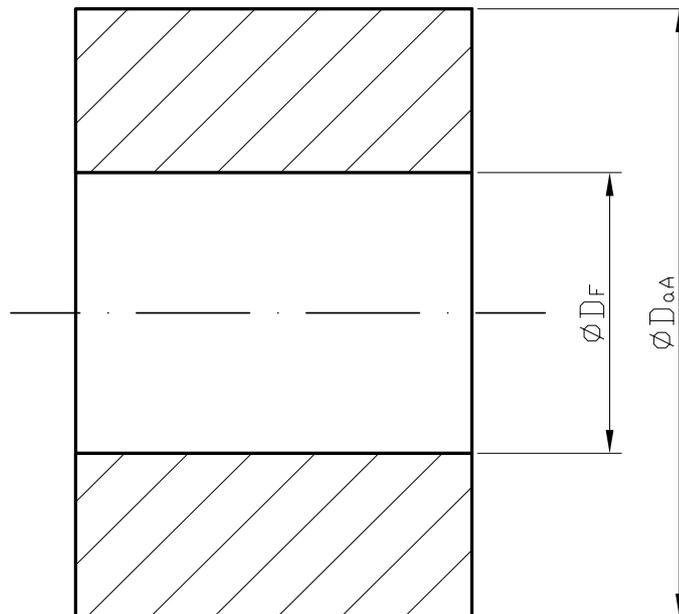


Abb. 4.3: Berechnungsmodell

Infolge der Glättung von Rauheitsspitzen beim Fügen steht im gefügten Zustand statt des Übermaßes U nur noch das wirksame Übermaß U_w zur Verfügung. Der Wert von U_w steht laut Aufgabenstellung zur Verfügung und muss demnach nicht berechnet werden.

In Abhängigkeit von der Höhe der Fügebeanspruchung von Innen- und Außenteil wird zwischen rein elastischen, elastisch-plastischen und vollplastischen Pressverbänden unterschieden. Treten in Innen- und Außenteil keine plastischen Dehnungen auf, so liegt ein rein elastischer Pressverband vor. Liegen in Innen- und/oder Außenteil elastisch und plastisch beanspruchte Bereiche vor, verhält sich der Pressverband elastisch-plastisch. Beim Auftreten von unbegrenzten plastischen Dehnungen in Innen- und/oder Außenteil liegt der vollplastische Fall vor, welcher nicht zulässig ist.

Für die aufgeführten Berechnungen wird die in (4.1) ermittelte Grenzfestigkeit des Werkstoffes R_{eL} verwendet. Für die Auslegung des Pressverbandes werden außerdem das Durchmesser Verhältnis

$$Q_A = \frac{D_F}{D_{aA}} \quad (4.1)$$

und das bezogene wirksame Übermaß

$$\xi_w = \frac{U_w}{D_F} \quad (4.2)$$

benötigt.

Die Soll-Sicherheit von Innen- und Außenteil werden auf

$$S_{PI} = 1 \quad (4.3)$$

und

$$S_{PA} = 1 \quad (4.4)$$

gesetzt. Eine höhere Sicherheit ist an dieser Stelle nicht vorgesehen, da diese für die FE-Lösung nicht berücksichtigt werden kann.

Sowohl im rein elastischen als auch elastisch-plastischen Rechengang wird zunächst geprüft, ob das gegebene wirksame Übermaß U_w auf zulässige Beanspruchungen im Innen- und Außenteil führen. Anschließend werden die gesuchten Bestimmungsgrößen berechnet.

4.2.2 Berechnung von rein elastisch beanspruchten Pressverbänden

Das Innenteil ist laut (Kap. 4.1) eine Vollwelle. Da auch $E_A = E_I$ und $\nu_A = \nu_I$ sind, braucht die Hilfsgröße K (vgl. [11] S.8) nicht berechnet zu werden.

Damit das Außenteil die Soll-Sicherheit S_P gegen plastische Dehnung aufweist, muss dafür

$$\xi_w \leq \frac{2 R_{eLA}}{\sqrt{3} S_{PA} \cdot E} \quad (4.5)$$

und entsprechend für das Innenteil

$$\xi_w \leq \frac{4 R_{eLI}}{\sqrt{3} (1 - Q_A^2) S_{PI} \cdot E} \quad (4.6)$$

gelten. Eine rein elastische Beanspruchung liegt vor, wenn die beiden Bedingungen (4.5) und (4.6) erfüllt sind.

Der im rein elastischen Fall zum bezogenen wirksamen Übermaß gehörende Fugendruck p_e wird berechnet aus

$$p_e = \frac{1 - Q_A^2}{2} E \xi_w \quad (4.7)$$

4.2.3 Berechnung elastisch-plastisch beanspruchter Pressverbände

Für die Anwendung des in der Norm angegebenen Verfahrens im elastisch-plastischen Fall müssen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

- Das Innenteil muss voll sein.
- $E_A = E_I$
- $\nu_A = \nu_I$

Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, können Auslegungsverfahren nach [24] und [25] verwendet werden.

Im Gegensatz zum Außenteil kann ein volles Innenteil entweder rein elastisch oder vollplastisch beansprucht werden. Eine elastisch-plastische Beanspruchung ist nicht möglich.

Falls die Bedingung

$$(1 - Q_A^2) \frac{R_{eLA}}{2} \geq R_{eLI} \quad (4.8)$$

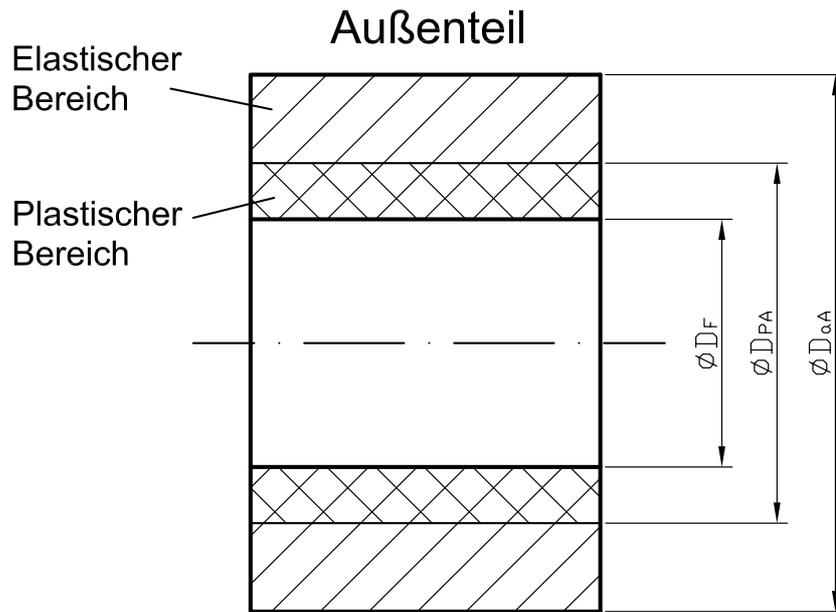


Abb. 4.4: Elastisch-plastisch beanspruchte Nabe

gilt, ist eine elastisch-plastische Auslegung des Pressverbandes nicht möglich, da das Innenteil bei einem Übermaß vollplastisch wird, während dessen das Außenteil noch rein elastisch bleibt.

Bei elastisch-plastischer Beanspruchung bildet sich im Außenteil eine innenliegende plastische Zone, welche von der außen liegenden elastischen Restzone durch eine Zylinderfläche mit dem Plastizitätswert D_{PA} getrennt wird (Abb. 4.4).

Für die weitere Rechnung ist die Bestimmung des Grenzdruckes p_{PI} der vollplastischen Beanspruchung des Innenteils und des Grenzdruckes p_{PA} der vollplastischen Beanspruchung des Außenteils notwendig.

$$p_{PI} = \frac{2}{\sqrt{3}} R_{eLI} \quad (4.9)$$

$$p_{PA} = \frac{2 R_{eLA}}{\sqrt{3}} \quad \text{für} \quad Q_A < \frac{1}{e} = 0,368 \quad (4.10)$$

$$p_{PA} = -2 R_{eLA} \frac{\ln(Q_A)}{\sqrt{3}} \quad \text{für} \quad Q_A \geq 0,368 \quad (4.11)$$

Der zulässige bezogene Plastizitätswert ζ_{zul} wird durch Auflösen der transcendente Gleichung (4.11) mit

$$\text{Fall 1:} \quad p_p = \frac{p_{PI}}{S_{PI}} \quad \text{für} \quad \frac{p_{PI}}{S_{PI}} \leq \frac{p_{PA}}{S_{PA}} \quad (4.12)$$

bzw.

$$\text{Fall 2: } p_p = \frac{p_{PA}}{S_{PA}} \quad \text{für} \quad \frac{p_{PA}}{S_{PA}} < \frac{p_{PI}}{S_{PI}} \quad (4.13)$$

bestimmt. Zur Auflösung der transzendenten Gleichung

$$2 \ln \zeta_{zul} - (Q_A \zeta_{zul})^2 + 1 - \sqrt{3} \frac{p_p}{R_{eLA}} = 0 \quad (4.14)$$

kann ein in der DIN 7190:2001-02 angegebenes Näherungsverfahren zur iterativen Bestimmung von ζ_{zul} angewendet werden. Die Iterationsvorschrift lautet

$$\zeta_{j+1} = \zeta_j \left\{ 1 - \frac{2 \ln \zeta_j - (Q_A \zeta_j)^2 + 1 - 1,732 \frac{p_p}{R_{eLA}}}{2 [1 - (Q_A \zeta_j)^2]} \right\} \quad (4.15)$$

Der Startwert wird auf

$$\zeta_1 = 1 \quad (4.16)$$

gesetzt. Die Iteration wird dann abgebrochen, wenn die Bedingung

$$|\zeta_{j+1} - \zeta_j| < 0,001 \quad (4.17)$$

erfüllt ist. Der ermittelte zulässige bezogene Plastizitätsdurchmesser $\zeta_{zul} = \zeta_{j+1}$ muss der Bedingung

$$1 \leq \zeta_{zul} \leq \frac{1}{Q_A} \quad (4.18)$$

genügen.

Damit das Außenteil elastisch-plastisch beansprucht ist, und die Ist-Sicherheit gegen vollplastische Beanspruchung mindestens gleich der Soll-Sicherheit für das Innenteil im Fall 1 bzw. für das Außenteil im Fall 2 ist, muss das bezogene wirksame Übermaß ξ_w im Bereich

$$\frac{2 R_{eLA}}{\sqrt{3} E} < \xi_w < \frac{2 R_{eLA}}{\sqrt{3} E} \zeta_{zul}^2 \quad (4.19)$$

liegen. Dabei stellt der linke Term der Ungleichung (4.19) die Bedingung für elastisch-plastische Beanspruchung des Außenteils dar und falls ξ_w kleiner als dieser ist, liegt ein rein elastisch beanspruchtes Außenteil vor. In diesem Fall ist die Berechnung nach (Kap.4.2.2) durchzuführen.

Bei dem bezogenen wirksamen Übermaß ξ_w beträgt der bezogene Plastizitätsdurchmesser ζ des Außenteils

$$\zeta = \sqrt{\frac{\sqrt{3} \xi_w E}{2 R_{eLA}}} = 0,931 \sqrt{\frac{\xi_w E}{R_{eLA}}} \quad (4.20)$$

Daraus lässt sich nach (4.21) der Plastizitätsdurchmesser D_{PA} errechnen.

$$D_{PA} = \zeta D_F \quad (4.21)$$

Anschließend muss noch der Anteil der plastisch beanspruchten Ringfläche q_{PA} am Gesamtquerschnitt q_A überprüft werden.

$$\frac{q_{PA}}{q_A} = \frac{(\zeta^2 - 1) Q_A^2}{1 - Q_A^2} \quad (4.22)$$

Bei hochbeanspruchten Pressverbänden im Maschinenbau soll der Erfahrungswert

$$\frac{q_{PA}}{q_A} = 0,30$$

nicht überschritten werden.

Der Fugendruck p_{ep} im elastisch-plastischen Fall ergibt sich aus

$$p_{ep} = \frac{R_{eLA}}{\sqrt{3}} [1 + 2 \ln \zeta - (Q_A \zeta)^2] \quad (4.23)$$

4.2.4 Anwendung für Materialpaarung St37-St50

Die für die Rechnung notwendigen Größen sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst.

Größe	Wert	Einheit
D_F	30	mm
D_{aA}	65	mm
U_w	40	μm
R_{eLI}	285	$\frac{N}{mm^2}$
R_{eLA}	245	$\frac{N}{mm^2}$
E	210000	$\frac{N}{mm^2}$
S_{PA}	1	
S_{PI}	1	

Tabelle 4.5: benötigte Größen für Materialpaarung St37-St50

Berechnete Größen für die rein elastische Auslegung des Pressverbandes für das gegebene wirksame Übermaß U_w

$$Q_A \text{ nach (4.1):} \quad Q_A = \frac{30}{65} = 0,462$$

$$\xi_w \text{ nach (4.2):} \quad \xi_w = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{30} = 1,33 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Prüfung von (4.5):} \quad 1,33 \cdot 10^{-3} \leq \frac{2 \cdot 245}{\sqrt{3} \cdot 1 \cdot 210000} = 1,35 \cdot 10^{-3}$$

Da die Forderung nach (4.5) erfüllt ist, wird das Außenteil rein elastisch beansprucht.

$$\text{Prüfung von (4.6):} \quad 1,33 \cdot 10^{-3} \leq \frac{4 \cdot 285}{\sqrt{3} \cdot (1 - 0,462^2) \cdot 1 \cdot 210000} = 3,98 \cdot 10^{-3}$$

Da die Forderung nach (4.6) erfüllt ist, wird das volle Innenteil rein elastisch beansprucht.

$$p_e \text{ nach (4.7):} \quad p_e = \frac{1,33 \cdot 10^{-3} \cdot 210000 \cdot (1 - 0,462^2)}{2} = 109,8 \frac{N}{mm^2}$$

Sowohl das Innenteil als auch das Außenteil werden rein elastisch beansprucht. Eine elastisch-plastische Auslegung des Pressverbandes ist demnach unnötig.

4.2.5 Anwendung für Materialpaarung 16MnCr5-42CrMo4

Die für die Rechnung notwendigen Größen sind in Tabelle 4.6 zusammengefasst.

Größe	Wert	Einheit
D_F	30	mm
D_{aA}	65	mm
U_w	40	μm
R_{eLI}	900	$\frac{N}{mm^2}$
R_{eLA}	590	$\frac{N}{mm^2}$
E	210000	$\frac{N}{mm^2}$
S_{PA}	1	
S_{PI}	1	

Tabelle 4.6: benötigte Größen für Materialpaarung 16MnCr5-42CrMo4

Berechnete Größen für die rein elastische Auslegung des Pressverbandes für das gegebene wirksame Übermaß U_w

$$Q_A \text{ nach (4.1):} \quad Q_A = \frac{30}{65} = 0,462$$

$$\xi_w \text{ nach (4.2):} \quad \xi_w = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{30} = 1,33 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Prüfung von (4.5):} \quad 1,33 \cdot 10^{-3} \leq \frac{2 \cdot 590}{\sqrt{3} \cdot 1 \cdot 210000} = 3,24 \cdot 10^{-3}$$

Da die Forderung nach (4.5) erfüllt ist, wird das Außenteil rein elastisch beansprucht.

$$\text{Prüfung von (4.6):} \quad 1,33 \cdot 10^{-3} \leq \frac{4 \cdot 900}{\sqrt{3} \cdot (1 - 0,462^2) \cdot 1 \cdot 210000} = 1,26 \cdot 10^{-2}$$

Da die Forderung nach (4.6) erfüllt ist, wird das volle Innenteil rein elastisch beansprucht.

$$p_e \text{ nach (4.7):} \quad p_e = \frac{1,33 \cdot 10^{-3} \cdot 210000 \cdot (1 - 0,462^2)}{2} = 109,8 \frac{N}{mm^2}$$

Sowohl das Innenteil als auch das Außenteil werden rein elastisch beansprucht. Eine elastisch-plastische Auslegung des Pressverbandes ist demnach unnötig.

4.3 Kontinuumsmechanische Betrachtung

Für die kontinuumsmechanische Betrachtung der Pressverbindung werden die geometrischen Größen auf den Radius bezogen. Dies steht im Gegensatz zu den in der Aufgabenstellung auf den Durchmesser bezogenen Größen. Deshalb werden die auf den Durchmesser bezogenen Größen in auf den Radius bezogene umgerechnet.

$$R_i = \frac{D_F}{2} = 15 \text{ mm}$$

$$R_a = \frac{D_{aA}}{2} = 32,5 \text{ mm}$$

$$\Delta R_m = \frac{U_w}{2} = \frac{40 \mu\text{m}}{2} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Da die Pressverbindung als Rotationskörper angesehen werden kann und die Belastung (siehe Kap. 4.1) der Axialsymmetrie genügt, handelt es sich um ein axialsymmetrisches Problem (Kap. 2.3.2).

Bei der Betrachtung wird davon ausgegangen, dass sich Welle und Nabe ungestört in Richtung der Rotationsachse (z -Richtung) ausdehnen können. Es wird deshalb angenommen, dass in jeder zur Rotationsachse senkrecht stehenden Schnittebene die von z abhängenden Spannungskomponenten σ_{zz} , σ_{rz} und $\sigma_{\varphi z}$ als vernachlässigbar klein gegenüber den nicht von z abhängenden Spannungskomponenten betrachtet werden können. Damit liegt im Inneren des Pressverbandes ein ebener Spannungszustand (Kap. 2.3.1) vor.

Die in (2.42) dargestellte homogene Verschiebungsdifferentialgleichung gilt somit genau für den vorliegenden Fall. Auf Grund der homogenen Temperaturverteilung ist der Temperaturgradient $\vartheta_{,r}$ gleich null. Es wirken keine äußeren Kräfte, womit die in radialer Richtung auf das Masselement bezogene Zentrifugalkraft f_r ebenfalls null ist. Demnach vereinfacht sich (2.42) zu

$$\left[\frac{1}{r} (r u_r)_{,r} \right]_{,r} = 0 \quad (4.24)$$

Die direkte Integration der Differenzialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r} (r u_r)_{,r} \right]_{,r} = 0 & \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} (r u_r)_{,r} = C_1 & \quad \Rightarrow \\ (r u_r)_{,r} = C_1 r & \quad \Rightarrow \quad r u_r = \frac{1}{2} C_1 r^2 + C_2 & \quad \Rightarrow \\ u_r(r) = \frac{1}{2} C_1 r + C_2 \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Nach Umbenennung der Integrationskonstanten erhält man die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung als Linearkombination von r und $1/r$.

$$u_r(r) = Ar + B \frac{1}{r} \quad (4.25)$$

Die allgemeine Lösung (4.25) wird in die aus Kap. 2.3.2 bekannten Gleichungen (2.40) eingesetzt.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(u_{r,r} + \nu \frac{u_r}{r} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \vartheta \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(A(1+\nu) - B \frac{1}{r^2} (1-\nu) \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \vartheta \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}(r) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u_r}{r} + \nu u_{r,r} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \vartheta \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(A(1+\nu) + B \frac{1}{r^2} (1-\nu) \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \vartheta \end{aligned} \quad (4.27)$$

Da der Temperaturgradient $\vartheta_{,r}$ gleich null ist, vereinfachen sich (4.26) und (4.27) zu

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(A(1+\nu) - B \frac{1}{r^2} (1-\nu) \right) \quad (4.28)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(A(1+\nu) + B \frac{1}{r^2} (1-\nu) \right) \quad (4.29)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4.25) und (4.28) soll der Pressverband als Randwertproblem betrachtet werden.

Lösung des Randwertproblems für die Nabe

Da die Pressverbindung keine äußeren Kräfte erfährt, sind die Spannungen in radialer Richtung am äußeren Rand gleich Null. Daraus ergibt sich die Spannungsrandbedingung

$$\text{Randbedingung 1:} \quad \sigma_{rr}(r = R_a) = 0 \quad (4.30)$$

Die radiale Verschiebung an der Nabeninnenseite wird durch u_n charakterisiert, mit welcher sich die Verschiebungsrandbedingung

$$\text{Randbedingung 2:} \quad u_r(r = R_i) = u_n \quad (4.31)$$

ergibt.

Durch Einsetzen der Randbedingungen (4.31) in (4.25) und (4.30) in (4.28) erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_r(R_i) &= u_n = A R_i + B \frac{1}{R_i} \\ \sigma_{rr}(R_a) &= 0 = \frac{E}{1-\nu^2} \left(A(1+\nu) - B \frac{1}{R_a^2} (1-\nu) \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Löst man dieses nach A und B auf, so resultieren

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1-\nu) R_i u_n}{R_a^2 (1+\nu) + R_i^2 (1-\nu)} \\ B &= \frac{(1+\nu) R_i R_a^2 u_n}{R_a^2 (1+\nu) + R_i^2 (1-\nu)} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Durch Einsetzen von (4.33) in (4.28) ergibt sich für die Spannung in radialer Richtung bei $r = R_i$

$$\begin{aligned} \sigma_{rrN}(R_i) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{(1-\nu)(1+\nu) R_i u_n - (1-\nu)(1+\nu) R_i \frac{R_a^2}{R_i^2} u_n}{R_a^2 (1+\nu) + R_i^2 (1-\nu)} \right] \\ &= \frac{E u_n \left(R_i - \frac{R_a^2}{R_i} \right)}{R_a^2 (1+\nu) + R_i^2 (1-\nu)} \\ &= \frac{E u_n (R_i^2 - R_a^2)}{R_i [R_a^2 (1+\nu) + R_i^2 (1-\nu)]} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Analog wird die Spannung in Umfangsrichtung bei $r = R_i$ zu

$$\sigma_{\varphi\varphi N}(R_i) = \frac{E u_n (R_i^2 + R_a^2)}{R_i [R_a^2 (1+\nu) + R_i^2 (1-\nu)]} \quad (4.35)$$

Lösung des Randwertproblems für die Welle

Die radiale Verschiebung auf der Rotationsachse, also bei $r = 0$, ist gleich Null, womit sich für die Welle die Verschiebungsrandbedingung

$$\text{Randbedingung 1: } u_r(r = 0) = 0 \quad (4.36)$$

ergibt. Die Verschiebung an der Wellenaußenseite in radialer Richtung wird durch u_w charakterisiert, mit welcher man die zweite Verschiebungsrandbedingung

$$\text{Randbedingung 2: } u_r(r = R_i) = u_w \quad (4.37)$$

erhält.

Wird die erste Randbedingung (4.36) in (4.25) eingesetzt, so entsteht

$$0 = A R_i + B \frac{1}{R_i} \quad \text{mit} \quad R_i \rightarrow 0 \quad (4.38)$$

Da die rechte Seite gleich Null sein muss, gilt $B = 0$. Setzt man die zweite Randbedingung (4.37) in (4.25) ein, wird

$$u_w = A R_i + B \frac{1}{R_i} \quad (4.39)$$

erhalten. Unter Berücksichtigung von $B = 0$ ergeben sich A und B zu

$$A = \frac{u_w}{R_i} \quad (4.40)$$

$$B = 0.$$

Durch Anwendung von (4.40) auf (4.28) resultiert die Spannung in radialer Richtung zu

$$\begin{aligned} \sigma_{rrW}(r) &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{u_w}{R_i} (1+\nu) - 0 \right] \\ &= \frac{E(1+\nu)u_w}{(1-\nu^2)R_i} \\ &= \frac{E u_w}{(1-\nu)R_i} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Analog erhält man die Spannung in Umfangsrichtung zu

$$\sigma_{\varphi\varphi W}(r) = \frac{E u_w}{(1-\nu)R_i} \quad (4.42)$$

Wie man an (4.41) und (4.42) sieht, sind σ_{rrW} und $\sigma_{\varphi\varphi W}$ gleich groß und über den gesamten Radius konstant. Somit liegt in der Welle ein homogener Spannungszustand vor.

Der zwischen Nabe und Welle bestehende Fugendruck p ist gleich dem Betrag von $\sigma_{rrW}(R_i)$ bzw. $\sigma_{rrN}(R_i)$. Die im Pressverband vorhandenen Radialspannungen von Welle und Nabe stellen jeweils Druckspannungen dar. Demnach stimmen $\sigma_{rrW}(R_i)$ bzw. $\sigma_{rrN}(R_i)$ in Betrag und Vorzeichen überein. Durch Gleichsetzen von (4.34) und (4.41) entsteht

$$\frac{E u_w}{(1-\nu)R_i} = \frac{E u_n (R_i^2 - R_a^2)}{R_i [R_a^2 (1+\nu) + R_i^2 (1-\nu)]} \quad (4.43)$$

Das Umstellen und Vereinfachen von (4.43) bringt den Zusammenhang

$$u_w = u_n \frac{(R_i^2 - R_a^2)}{R_a^2 (1+\nu) + R_i^2 (1-\nu)} = -0,38 u_n \quad (4.44)$$

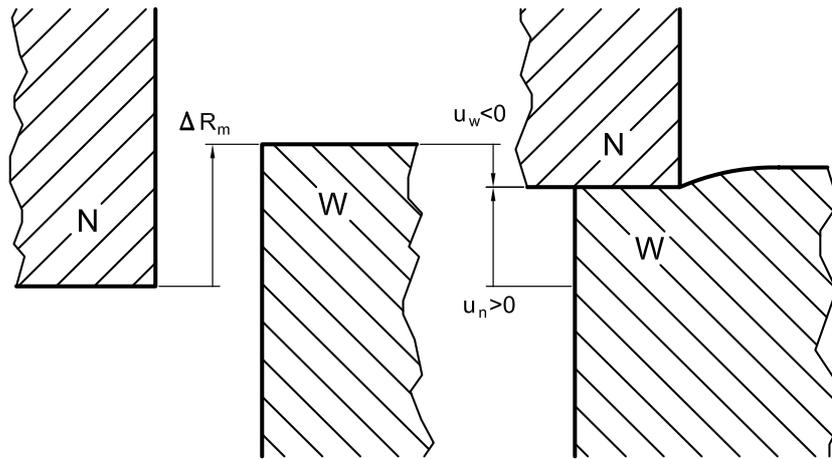


Abb. 4.5: Verschiebungsverhältnisse in der Pressfuge

In Abb. 4.5 ist ein weiterer Zusammenhang von u_n und u_w dargestellt.

$$\Delta R_m = u_n - u_w \quad (4.45)$$

Betrachtet man (4.44) und (4.45) als Gleichungssystem, so ergeben sich

$$u_w = -0,275 \Delta R_m \quad (4.46)$$

$$u_n = 0,725 \Delta R_m$$

Durch Einsetzen von (4.46) in (4.41), (4.42), (4.34) und (4.35) ergeben sich in der Pressfuge die folgenden Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{rrW}(R_i) &= \frac{E \cdot (-0,275) \Delta R_m}{(1 - \nu) R_i} = -110 \frac{N}{mm^2} \\ \sigma_{\varphi\varphi W}(R_i) &= \sigma_{rrW}(R_i) = -110 \frac{N}{mm^2} \\ \sigma_{rrN}(R_i) &= \frac{E \cdot 0,725 \Delta R_m \cdot (R_i^2 - R_a^2)}{R_i [R_a^2 (1 + \nu) + R_i^2 (1 - \nu)]} = -110 \frac{N}{mm^2} \\ \sigma_{\varphi\varphi N}(R_i) &= \frac{E \cdot 0,725 \Delta R_m \cdot (R_i^2 + R_a^2)}{R_i [R_a^2 (1 + \nu) + R_i^2 (1 - \nu)]} = 170 \frac{N}{mm^2} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Aus (4.47) geht der Pressfugendruck p hervor.

$$p = |\sigma_{rrW}(R_i)| = 110 \frac{N}{mm^2} \quad (4.48)$$

Der Vergleich des Pressfugendrucks nach DIN 7190 (4.7) mit dem nach kontinuumsmechanischer Betrachtung (4.48) ermittelten Fugendruck zeigt eine gute Übereinstimmung.

4.4 Festigkeitsnachweis nach DIN 743

Auf Grundlage der Norm 743 können Sicherheitsnachweise von Wellen und Achsen gegen

- **Ermüdungsbruch** (Dauerbruch, Schwingungsbruch) bei Überschreiten der Dauerfestigkeit
- **bleibende Verformung** (oder Anriss oder Gewaltbruch)

durchgeführt werden. Dafür müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- Annahme von konstanter Amplitude bzw. Ermittlung einer schädigungsäquivalenten Amplitude
- Die maximalen Spannungen müssen bekannt sein
- Welle und Nabe bestehen aus Stahl

Auf den Sicherheitsnachweis gegen Gewaltbruch wird verzichtet, da dieser Fall für die Arbeit nicht relevant ist. Die Festigkeitswerte für die Sicherheit gegen Dauerbruch sind für die Grenzlastspielzahl $N_G = 10^7$ ermittelt und dienen als Dauerfestigkeitswerte [10]. Die folgenden Berechnungsvorschriften zur Berechnung der Sicherheit einer abgesetzten Welle bei Biegung gegen Dauerbruch sind der DIN 743 Ausgabe 1997 entnommen.

Da die Nomenklatur der Norm verwendet werden soll (Abb. 4.6), müssen die notwendigen geometrischen Abmaße der Pressverbindung entsprechend übertragen werden (4.49).

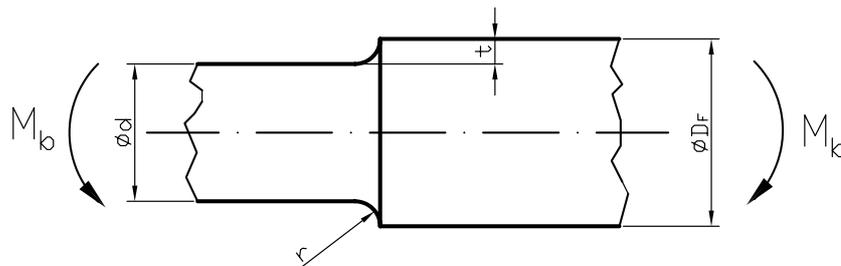


Abb. 4.6: Abmessungen der Welle nach DIN 743

$$\begin{aligned}
 D &= D_F &= 30\text{mm} \\
 d &= \frac{D_F}{1,091} &= 27,5\text{mm} \\
 r &= \frac{D_F}{4,42} &= 6,79\text{mm} \\
 t &= \frac{D_F - d}{2} &= 1,25\text{mm}
 \end{aligned}
 \tag{4.49}$$

Für den Fall, dass nur ein kleiner Unterschied zwischen d und D besteht und sich der Wellenübergang direkt am Nabenende befindet, was hier der Fall ist, kann es nach DIN 743/2 zu einer gegenseitigen Beeinflussung der Kerbwirkung am Wellenübergang und Nabensitz kommen.

Die Biegebeanspruchung σ_b setzt sich aus der Biegemittelspannung σ_{bm} und der Biegespannungsamplitude σ_{ba} zusammen.

$$\sigma_{ba} = \frac{M_b}{W_b} = \frac{200 \text{ Nm}}{\frac{\pi}{32} d^3} = 104 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad (4.50)$$

$$\sigma_b = \sigma_{bm} \pm \sigma_{ba} = 0 \pm 104 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad (4.51)$$

Die Formzahl α_σ wird nach DIN 743/2 Bild 10 mit

$$\frac{d}{D} = 0,917 \quad \frac{r}{t} = 5,43 \quad \frac{r}{d} = 0,247 \quad (4.52)$$

zu

$$\alpha_\sigma = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,62 \frac{r}{t} + 11,6 \frac{r}{d} \left(1 + 2 \frac{r}{d}\right)^2 + 0,2 \left(\frac{r}{t}\right)^3 \frac{d}{D}}} = 1,16 \quad (4.53)$$

ermittelt. Das bezogene Spannungsgefälle G' errechnet sich nach DIN 743/2 Bild 4 mit

$$\varphi = \frac{1}{4 \sqrt{\frac{t}{r} + 2}} = 0,269 \text{ mm}^{-1} \quad (4.54)$$

zu

$$G' = \frac{2,3 \cdot (1 + \varphi)}{r} = 0,43 \quad (4.55)$$

Im Folgenden müssen die beiden Werkstoffpaarungen jeweils getrennt betrachtet werden, da die Werkstoffwerte in die Berechnungen eingehen.

4.4.1 Nachweis für Materialpaarung St37-St50

Der Dauerfestigkeitsnachweis wird nach DIN 743 für die Welle aus St50-2 durchgeführt. Außer den aus (Kap.4.1) bekannten Werkstoffkennwerten werden noch die Zug-Druckwechselfestigkeit σ_{zdW} und die Biegewechselfestigkeit σ_{bW} [10] benötigt. Die Werkstoffkennwerte sind auf den Nenndurchmesser $d_b = 16\text{mm}$ bezogen.

$$\begin{aligned}
 \sigma_B(d_b) &= R_m &= 470 \frac{N}{\text{mm}^2} \\
 \sigma_S(d_b) &= R_{p0,2} &= 285 \frac{N}{\text{mm}^2} \\
 \sigma_{zdW}(d_b) &= 195 \frac{N}{\text{mm}^2} \\
 \sigma_{bW}(d_b) &= 245 \frac{N}{\text{mm}^2} \\
 R_Z &= 3,2\mu\text{m}
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Bei der Ermittlung des technologischen Größeneinflussfaktors $K_1(d)$ muss beachtet werden, dass es sich bei St50-2 um einen Baustahl handelt (DIN 743/2 Gl.(8)). Er berücksichtigt näherungsweise, dass die erreichbare Härte und damit die Streckgrenze und Ermüdungsfestigkeit beim Vergüten bzw. die Kernhärte beim Einsatzhärten mit steigendem Durchmesser abnehmen. Der Faktor wird benötigt, da die Werkstoffkennwerte auf den Nenndurchmesser von $d = 16\text{mm}$ bezogen sind.

$$\text{Für } d \leq 32\text{mm} \text{ gilt } K_1(d) = 1 \tag{4.57}$$

Mit der auf den realen Wellendurchmesser d bezogenen Streckgrenze

$$\sigma_S(d) = K_1(d) \cdot \sigma_S(d_b) = 285 \frac{N}{\text{mm}^2} \tag{4.58}$$

wird die Stützziffer n aufgrund DIN 743/2 Gl.(4a) berechnet.

$$n = 1 + \sqrt{G' \cdot \text{mm}} \cdot 10^{-\left(0,33 + \frac{\sigma_S(d)}{712 \frac{N}{\text{mm}^2}}\right)} = 1,12 \frac{N}{\text{mm}^2} \tag{4.59}$$

Damit ergibt sich laut DIN 743/2 Gl.(3) die Kerbwirkungszahl β_σ zu

$$\beta_\sigma = \frac{\alpha_\sigma}{n} = 1,04 \tag{4.60}$$

Der geometrische Größeneinflussfaktor $K_2(d)$ soll berücksichtigen, dass bei zunehmenden Durchmesser die Biegewechselfestigkeit σ_{bW} in die Zug-Druckwechselfestigkeit σ_{zdW} übergeht und die Torsionswechselfestigkeit τ_{tW} sinkt. Bei Biegung wird er nach DIN 743/2 G.(12) ermittelt.

$$K_2(d) = 1 - \left(1 - \frac{\sigma_{zdW}}{\sigma_{bW}}\right) \cdot \frac{\lg\left(\frac{d}{7,5 \text{ mm}}\right)}{\lg 20} = 0,911 \quad (4.61)$$

Mittels des Einflussfaktors der Oberflächenrauigkeit $K_{F\sigma}$ wird der zusätzliche Einfluss der Rauheit auf die Dauerfestigkeit des Bauteils berücksichtigt. Sowohl für Zug/Druck als auch Biegung ist er nach DIN 743/2 Gl.(15) zu berechnen. Hierfür muss die Zugfestigkeit auf den realen Durchmesser bezogen werden.

$$\sigma_B(d) = \sigma_B(d_b) \cdot K_1(d) = 470 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad (4.62)$$

$$K_{F\sigma} = 1 - 0,22 \cdot \lg\left(\frac{R_Z}{\mu\text{m}}\right) \cdot \left(\lg \frac{\sigma_B(d)}{20 \frac{N}{\text{mm}^2}} - 1\right) = 0,959 \quad (4.63)$$

Da keine Oberflächenverfestigung vorliegt, ergibt sich der Einflussfaktor der Oberflächenverfestigung K_v nach DIN 743/2 zu

$$K_v = 1 \quad (4.64)$$

Nunmehr kann der Gesamteinflussfaktor K nach DIN 743/2 Gl.(5) ermittelt werden.

$$K = \left(\frac{\beta_\sigma}{K_2(d)} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1\right) \cdot \frac{1}{K_v} = 1,18 \quad (4.65)$$

Da ausschließlich Biegung vorliegt, errechnet sich die Vergleichsmittelspannung σ_{mv} nach DIN 743/1 Gl.(11) zu

$$\sigma_{mv} = \sqrt{\sigma_{bm}^2} = 0 \quad (4.66)$$

Die Biegewechselfestigkeit des gekerbten Bauteils σ_{bWK} erhält man nach DIN 743/1 Gl.(4) zu

$$\sigma_{bWK} = \frac{\sigma_{bW} \cdot K_1(d)}{K} = 207 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad (4.67)$$

Daraus wird der Einflussfaktor der Mittelspannungsempfindlichkeit $\psi_{b\sigma K}$ ermittelt (DIN 743/1 Gl.(9)).

$$\psi_{b\sigma K} = \frac{\sigma_{bWK}}{2 \cdot K_1(d) \cdot \sigma_B(d_B) - \sigma_{bWK}} = 0,282 \quad (4.68)$$

Die Biegespannungsamplitude der Bauteilfestigkeit σ_{bADK} ergibt sich nach DIN 743/1 Gl.(6) Fall 1.

$$\sigma_{bADK} = \sigma_{bWK} - \psi_{b\sigma K} \cdot \sigma_{mv} = \sigma_{bWK} = 207 \frac{N}{mm^2} \quad (4.69)$$

Nach DIN 743/1 Gl.(2) lässt sich abschließend die vorhandene Sicherheitszahl S für den Dauerfestigkeitsnachweis ermitteln.

$$\begin{aligned} \frac{1}{S^2} &= \left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bADK}} \right)^2 \\ S &= 1,99 \end{aligned} \quad (4.70)$$

Die Welle besitzt somit die Sicherheit $S = 1,99$ gegen Dauerbruch.

4.4.2 Nachweis für Materialpaarung 16MnCr5-42CrMo4

Analog wird auch hier lediglich die Welle aus 42CrMo4 betrachtet. Die Werkstoffkennwerte sind ebenfalls auf den Nenndurchmesser $d_b = 16mm$ bezogen.

$$\begin{aligned} \sigma_B(d_b) &= R_m &= 1100 \frac{N}{mm^2} \\ \sigma_S(d_b) &= R_{p0,2} &= 900 \frac{N}{mm^2} \\ \sigma_{zdW}(d_b) &= 440 \frac{N}{mm^2} \\ \sigma_{bW}(d_b) &= 550 \frac{N}{mm^2} \\ R_Z &= 3,2\mu m \end{aligned} \quad (4.71)$$

Bei der Ermittlung von $K_1(d)$ muss DIN 743/2 Gl.(9) verwendet werden, da ein vergüteter Stahl vorliegt.

$$K_1(d) = 1 - 0,26 \cdot \lg \left(\frac{d}{d_B} \right) = 0,939 \quad (4.72)$$

$$\sigma_S(d) \text{ nach (4.58): } \sigma_S(d) = 845 \frac{N}{mm^2}$$

$$n \text{ nach (4.59): } n_s = 1,02$$

$$\beta_\sigma \text{ (4.60): } \beta_\sigma = 1,14$$

$$K_2(d) \text{ (4.61): } K_2(d) = 0,913$$

$$\sigma_B(d) \text{ nach (4.62): } \sigma_B(d) = 1033 \frac{N}{mm^2}$$

$$K_{F\sigma} \text{ (4.63): } K_{F\sigma} = 0,921$$

$$K_v \text{ (4.64): } K_v = 1$$

$$K \text{ (4.65): } K = 1,33$$

$$\sigma_{mv} \text{ nach (4.66): } \sigma_{mv} = 0$$

$$\sigma_{bWK} \text{ nach (4.67): } \sigma_{bWK} = 388$$

$$\psi_{b\sigma K} \text{ nach (4.68): } \psi_{b\sigma K} = 0,231$$

$$\sigma_{bADK} \text{ nach (4.69): } \sigma_{bADK} = 388$$

Daraus errechnet sich die Sicherheit gegen Dauerbruch nach (4.70) zu

$$S = 3,73$$

Kapitel 5

FEM-Analyse des Pressverbandes

Die Messung von Spannungen und Verschiebungen innerhalb der Pressungsfuge einer Welle-Nabe-Verbindung gestaltet sich sehr aufwendig. Deshalb sollen numerische Untersuchungen bei der Auswertung signifikanter Größen im Kontaktbereich helfen. Die Berechnungen erfolgen nach der Methode der Finiten Elemente (Kap. 2.5) mit dem Programm MARC/MENTAT [34]. Dieses eignet sich besonders für die Behandlung von nichtlinearen Problemen, also auch Kontaktaufgaben im elastisch-plastischen Bereich. Die eigentliche numerische Untersuchung soll nach dem in Abb. 5.1 dargestellten Ablaufplan erfolgen.

Im Folgenden sei die Bezeichnung der Koordinatenrichtungen vereinbart. Die z -Koordinate stimmt mit der axialen Richtung der Verbindung überein, wobei $z = 0$ sich dort befindet, wo die Kontaktfuge beginnt. Dies ist für Nabenüberstand am Ende des Wellenabsatzes und für Nabenunterstand an der Nabenkante. Der Vorteil liegt darin, dass sich so die Ergebnisse der unterschiedlichen Welle-Nabe-Anordnungen besser miteinander vergleichen lassen. Die beiden anderen Koordinaten werden als Zylinderkoordinaten betrachtet. Dabei repräsentieren r die radiale Richtung und φ die Umfangsrichtung. Auf der Rotationsachse der Verbindung gilt $r = 0$. Die Biegeachse des Momentes M_b sei die Schnittachse der Ebenen $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ und $z = 0$ für Nabenüberstand bzw. $z = -2mm$ für Nabenunterstand. Die Modell-Abbildungen stellen Meridianschnitte für $\varphi = 0/\pi$ dar. Zum besseren Verständnis sei vereinbart dass “oben“ mit $\varphi = 0$ und “unten“ mit $\varphi = \pi$ gleichzusetzen ist.

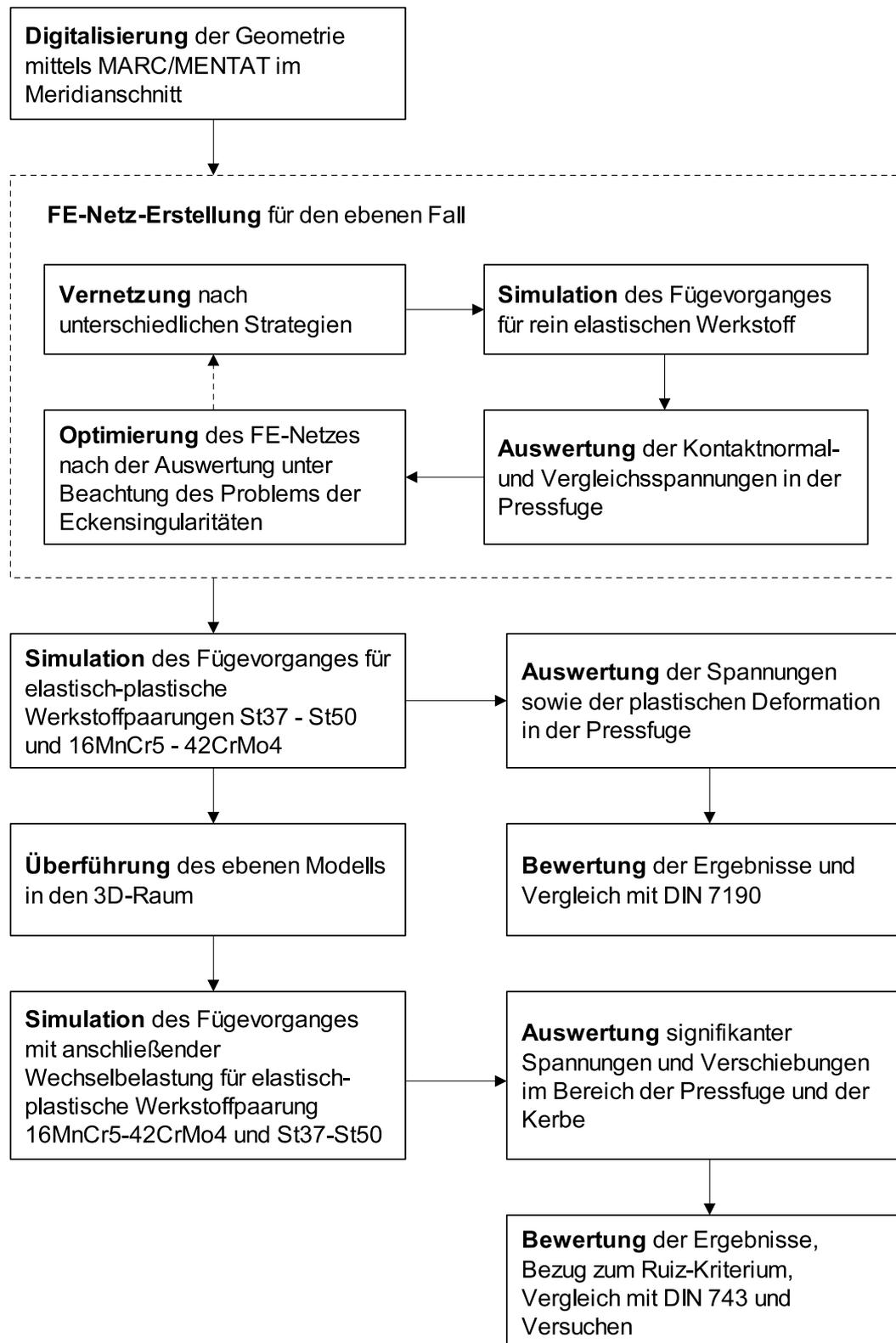


Abb. 5.1: Ablaufplan für numerische Untersuchung

5.1 Digitalisierung der Geometrie

Wie aus der Aufgabenstellung und Abb. 4.1 bekannt, sollen die numerischen Untersuchungen sowohl für den Fall des Nabenüberstandes als auch des Nabenunterstandes durchgeführt werden. Der geometrische Unterschied zwischen diesen Anordnungen liegt lediglich in der Anordnung von Welle und Nabe. Aus diesem Grund werden Welle und Nabe getrennt voneinander digitalisiert und vernetzt. Erst danach werden sie in das jeweilige Modell überführt. Das wirksame Übermaß U_w ist für Nabenüberstand und -unterstand gleich. Der Innendurchmesser der Nabe wird dementsprechend verkleinert, um nach dem Fügen die reale Pressverbindung nachbilden zu können.

5.2 FE-Netz-Erstellung im 2D-Raum

Zunächst soll die für den Belastungsfall optimale Vernetzung gefunden werden, bei welcher die Wirklichkeit so gut wie möglich nachgebildet und der Rechenaufwand gering gehalten werden. Dafür wird die Geometrie zunächst auf drei verschiedene Weisen vernetzt. Die entstandenen Modelle werden anschließend numerisch gefügt. Dabei orientieren sich die Randbedingungen an der Versuchsanordnung von GROPP [20], in welcher Pressverbindungen mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Abmaßen untersucht wurden.

5.2.1 Vernetzung nach unterschiedlichen Strategien

Variante 1 - Grobe Vernetzung

Die einfachste Möglichkeit der Vernetzung ist in Abb. 5.2 dargestellt. Die Vernetzung von Welle und Nabe erfolgt mit 4-Knoten-Viereck-Elementen (quad(4)) [35] in recht grober Form.

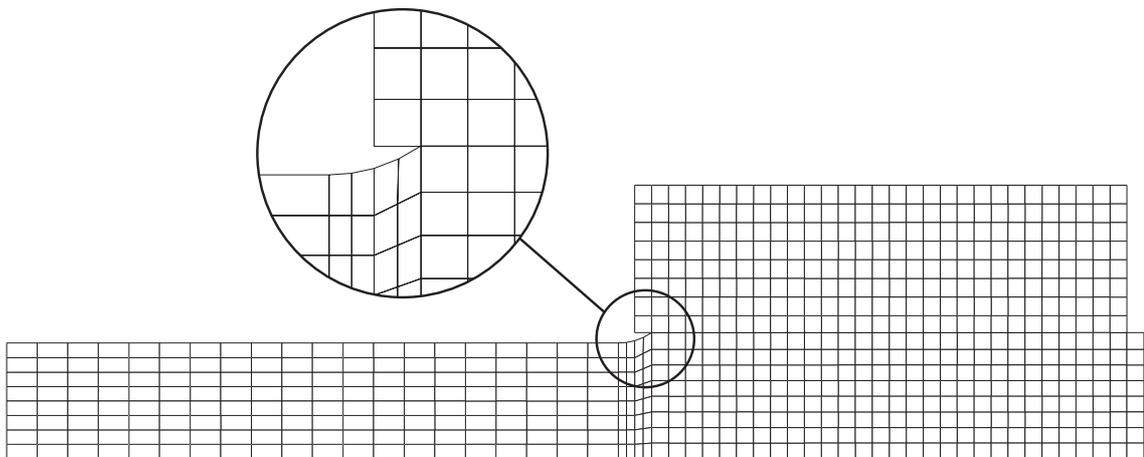


Abb. 5.2: Grobe Vernetzung für Nabenüberstand

Variante 2 - Feine Vernetzung

Mit dem Ziel, genauere Ergebnisse zu erzielen, wird in einer zweiten Variante die Vernetzungsdichte stark erhöht (Abb. 5.3). Auch hier kommen 4-Knoten-Viereck-Elemente zur Anwendung.

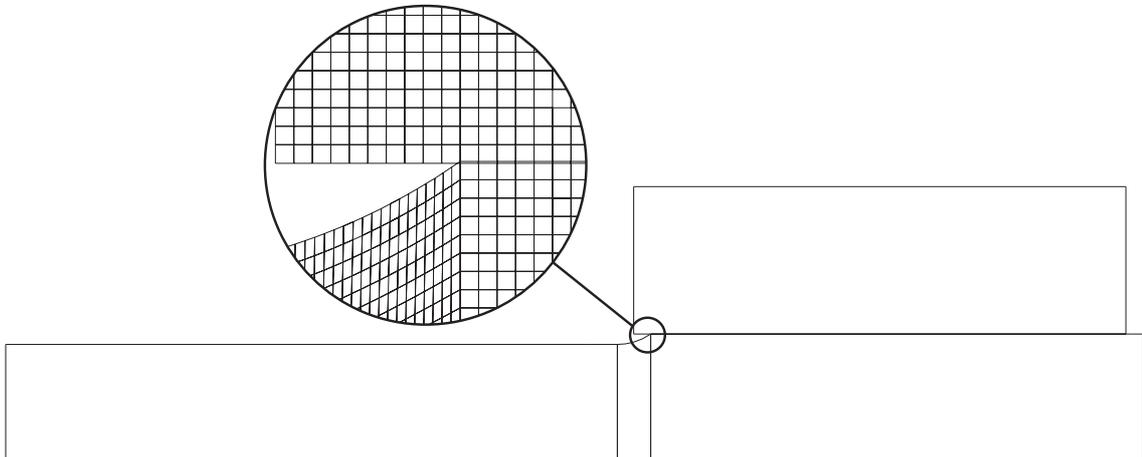


Abb. 5.3: Feine Vernetzung für Nabenüberstand

Variante 3 - Vernetzung mit Bias-Faktor

Mit dieser Variante soll ein Kompromiss zwischen grober und feiner Vernetzung gefunden werden. Eine Möglichkeit stellt die Nutzung des gewichteten Vernetzens dar. Dabei nimmt die Netzdichte in einer gewünschten Richtung zu bzw. ab. Für die Pressverbindung, bei welcher vor allem die Kontaktfuge und ihre direkte Umgebung von Interesse ist, bedeutet dies, dass zum Fugenbeginn hin das Netz feiner wird (Abb. 5.4). Realisiert wird dies in MARC/MENTAT durch den Bias-Faktor [35].

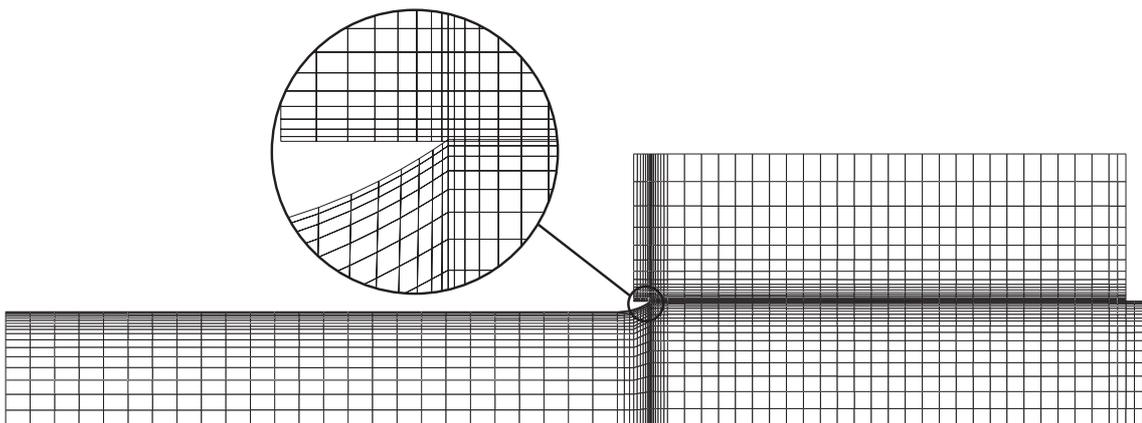


Abb. 5.4: Bias-Vernetzung für Nabenüberstand

5.2.2 Simulation des Fügevorganges

Bei den Untersuchungen von GROPP wurden Welle und Nabe als Längspressverband (siehe auch [18], [20]) gefügt. Die durch das Verfahren der Längseinpressung entstandene ungleichmäßige Spannungsverteilung wurde durch die anschließenden Dauerversuche ausgeglichen. Eine Simulation dieses Vorganges mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente wird auf Grund des unverhältnismäßig großen Rechenaufwandes nicht durchgeführt. Eine Fügung als Querpressverband bereitet deutlich weniger Probleme. Um keine verfahrensbedingten Spannungen zu erhalten, wird der Reibfaktor μ auf Null gesetzt. Die Nabe kann demzufolge ungestört auf der Welle gleiten.

Da es sich um thermisches Fügen handelt, ist zunächst die Ermittlung der Fügetemperatur ϑ_{Aerf} nach DIN 7190 [11] nötig. Die Wärmeausdehnungskoeffizienten sind [11] entnommen und für alle Werkstoffe aus der Aufgabenstellung gleich groß (5.1).

$$\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C} \quad (5.1)$$

Das Fügenspiel $U_{s\vartheta}$ ist für den numerischen Fügevorgang ohne Bedeutung. Die Raumtemperatur ϑ_R wird auf Null gesetzt, ebenso wie die Fügetemperatur des Innenteils ϑ_I . Somit ergibt sich die erforderliche Fügetemperatur des Außenteils ϑ_{Aerf} zu

$$\begin{aligned} \vartheta_{Aerf} &= \vartheta_R + \frac{U_F}{\alpha \cdot D_F} + (\vartheta_I - \vartheta_R) \\ &= 0^{\circ}C + \frac{0,004mm}{11 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C} \cdot 30mm} + 0^{\circ}C \\ &= 121^{\circ}C \end{aligned} \quad (5.2)$$

Um ein Überlappen von Welle und Nabe im Modell auszuschließen, wird die ermittelte Temperatur um ca. ein Drittel auf $160^{\circ}C$ erhöht.

Bei der Netzoptimierung wird auf die Verwendung von elastisch-plastischen Materialeigenschaften verzichtet. Dadurch wird der Rechenaufwand niedrig gehalten und die Ergebnisse der unterschiedlichen Varianten lassen sich gut miteinander vergleichen. Die Materialeigenschaften lauten wie folgt:

Werkstoffwert	Wert	Einheit
E-Modul	210000	$\frac{N}{mm^2}$
ν	0,3	-
α	$11 \cdot 10^{-6}$	$\frac{1}{^{\circ}C}$

Tabelle 5.1: elastische Materialkennwerte

Um eine Starrkörperbewegung zu verhindern, müssen Verschiebungsrandbedingungen definiert werden. Diese werden so gewählt, dass sich die Nabe bei Erwärmung ungestört ausdehnen kann. Stellvertretend werden die Verschiebungsrandbedingungen für Variante 1 in Abb. 5.5 dargestellt. Die Berechnung erfolgt als rotationssymmetrisches Problem, womit eine Fixierung von Welle und Nabe in Umfangsrichtung nicht notwendig ist.

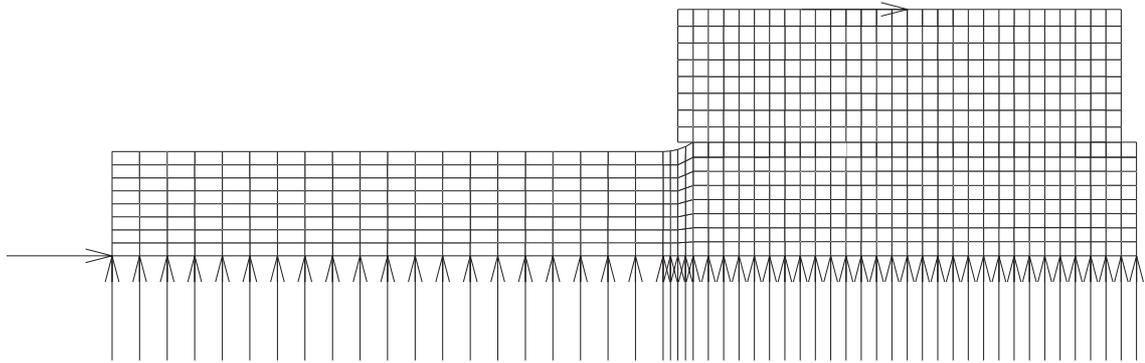


Abb. 5.5: Randbedingungen für Variante 1

5.2.3 Auswertung der Varianten 1-3

Zwei wichtige Beurteilungskriterien bei der numerischen Untersuchung sind die Kontaktnormalspannungen $\sigma_{rr}(\frac{D_F}{2}, \varphi, z)$ und die Vergleichsspannungen $\sigma_v(\frac{D_F}{2}, \varphi, z)$ in der Fuge. Da die an der Pressverbindung angreifenden Belastungen axialsymmetrisch sind, müssen aufgrund der Rotationssymmetrie beide Spannungen von φ unabhängig sein. Die Kontaktspannungen führen durch Multiplikation mit dem Reibfaktor μ zu der Schubspannung, bis zu welcher Haften vorliegt. Überschreitet die Reibschubspannung τ_r diesen Wert, tritt Gleiten auf.

Mit Hilfe der Vergleichsspannungen, welche auf der Gestaltänderungsenergiehypothese (MISES-Hypothese) basieren, lässt sich ermitteln, an welcher Stelle die Gesamtbeanspruchung in der Pressungsfuge am größten und plastische Deformation zu erwarten ist.

Die Auswertung von A.1 und A.3 zeigt, dass bei grober Vernetzung (Variante 1) die Kontaktnormalspannung σ_{rr} im Mittelteil der Kontaktfuge um ca. 10% niedriger ist, als der in Kap. 4.3 errechnete Pressfugendruck von $110 \frac{N}{mm^2}$. Für die Varianten 2 und 3 ist lediglich eine Abweichung von maximal 3% zu beobachten.

Zum Fugenbeginn hin ist infolge der Kantenpressung sowohl bei Nabenüberstand als auch Nabenunterstand ein starker Anstieg der Spannungen zu beobachten. Bei Nabenunterstand sitzt die Nabenkante direkt auf der Welle auf. Für diesen Fall gibt es Arbeiten, welche versuchen, ausgehend von den Grundgleichungen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie analytische Lösungen abzuleiten [26]. Bei diesen Lösungen wachsen die Radialspannungen bei Annäherung gegen die Nabenstirnseite gegen

Unendlich. Dies tritt nach STEVEN [49] bei allen elastotheoretischen Lösungen auf, bei denen an den Stirnflächen ein nicht verschwindendes Übermaß vorgegeben ist. Das bedeutet, je genauer ein numerisches Modell den Pressverband abbildet, desto größer werden nach der linearen Elastizitätstheorie die Spannungen an der Nabenkante. Beim realen Pressverband werden diese Spannungspitzen im Kantenbereich durch plastische Deformation begrenzt.

Bei Nabenüberstand trifft die Wellenabsatzckecke auf die Nabeninnenseite, bei Nabenunterstand die Nabenecke auf die Wellenaußenfläche. Da die Modellnetze aus Knoten bestehen, treten an den Ecken punktbelastete Bereiche auf, was zu sogenannten Singularitäten führt. Dieses Problem soll im Folgenden behandelt werden.

5.2.4 Behandlung der Eckensingularitäten

Am realen Bauteil ist aufgrund der Materialeigenschaften jede Spannung endlich. Wird bei steigender Belastung die Elastizitätsgrenze überschritten, kommt es zur plastischen Deformation und damit zur Begrenzung der Spannung [siehe auch Kap. 2.4]. Durch die Anwendung der linearen Elastizitätstheorie bei der numerischen Berechnung werden plastische Deformationen verhindert. Dadurch können Spannungen entstehen, welche deutlich höher sind oder gar gegen Unendlich streben. Diese Stellen heißen Singularitäten. Im Normalfall handelt es sich um Singularitäten 2.Ordnung, d.h., die Funktionswerte in der Nähe der singulären Stelle streben gegen Unendlich. Ziel ist es, das Abklingverhalten der Singularität möglichst genau zu beschreiben und somit deren Einfluss lokal zu begrenzen [9], [36].

Dies kann mit zwei unterschiedlichen Strategien erreicht werden. Zum einen kann das FE-Startnetz vor Beginn der Rechnung, also a-priori, im Bereich der Singularität gezielt verändert werden, zum anderen hinterher, also a-posteriori, mit Hilfe von Extrapolationsalgorithmen das adaptive Verfahren beschleunigt werden.

Bei der a-priori Optimierung stellt sich die Frage nach der Vernetzung für optimale Genauigkeit, d.h. der Minimierung des Diskretisierungsfehlers der FE-Lösung. Eine Möglichkeit stellt die Verwendung spezieller Elemente, bei welchen der FE-Ansatzraum um die entsprechenden singulären Funktionen erweitert wird, dar [53]. Eine weitere Möglichkeit ist das Verfahren der "lokalen graduellen Netzverfeinerung". Es begründet sich auf Arbeiten aus den 70er Jahren zu 2D-Singularitäten, u.a. [3], [4], [5], [39], [42], [43] und wurde von APEL [1], [2] weiter entwickelt. Das Verfahren basiert darauf, dass die Knoten in der Umgebung der singulären Stelle (der Ecke) zu dieser hin verschoben werden, so dass die Kanten danach ein vorgeschriebenes Streckungsverhältnis aufweisen. Zusätzlich kann das Netz durch Einfügen weiterer Knoten bzw. Elemente verfeinert werden. Die modifizierten FE-Netze weisen bei der Berechnung eine höhere, also bessere, Konvergenzordnung als die ursprünglichen quasiuniformen Netze auf. In verschiedenen Arbeiten wurde gezeigt, dass die Konvergenzordnung von μ , dem Streckungsverhältnis, abhängt und für $\mu < 1$ besser wird [1], [2]. Abb. 5.6 zeigt die Anwendung dieses Verfahrens auf ein bestehendes Netz. Die Anzahl der Elemente ist unverändert, lediglich die Knoten in Nähe der Singularität werden verschoben. Dieses in [1] untersuchte Beispiel lässt sich auf das vorliegende Problem übertragen.

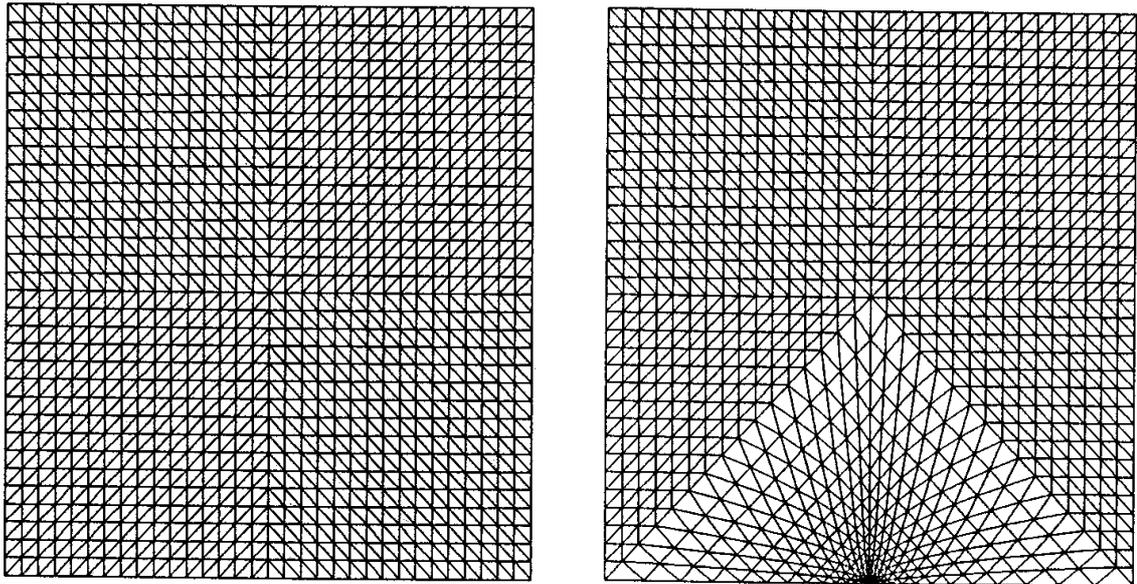


Abb. 5.6: uniformes Netz, $\mu = 1$ (links); transformiertes Netz, $\mu = 0,4$ (rechts)

Bei Nabenüberstand ist $z = 2\text{ mm}$ von der Nabenkante entfernt und stimmt mit dem Wellenabsatz überein. Im Gegensatz dazu befindet sich bei Nabenunterstand $z = 0$ genau an der Nabenkante, ist aber 2 mm vom Wellenabsatz entfernt. Deshalb wird der Kontaktbereich nahe der Singularität in Quadrate mit einer Seitenlänge $R = 2\text{ mm}$ aufgeteilt. Diese können beliebig vernetzt und kombiniert werden. In Abb. 5.7 ist eine solche Vernetzung zu sehen.

Der Abstand eines Kantenknoten i von der singulären Stelle aus errechnet sich aus folgender Vorschrift:

$$a_i = R \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{\mu}} \quad (5.3)$$

Die Auflösung des Netzes kann dabei durch die Kantenknotenzahl n beeinflusst werden. Um einen möglichst geringen Diskretisierungsfehler zu erhalten, wird der Streckungsfaktor μ nach [2] Fig.7.1 zu $\mu = 0,35$ festgelegt. Da die Erstellung des FE-Netzes mit lokaler gradueller Netzverfeinerung sehr aufwendig ist, werden mit Hilfe von PYTHON [41] entsprechende Scripte erstellt. Ein für die graduelle Vernetzung erstellter Programmablauf kann so für jede gewünschte Geometrie angepasst werden.

5.2.5 Auswertung der graduellen Vernetzung

Mit steigender Kantenknotenzahl n steigt der Rechenaufwand deutlich. Dem entgegen steht, dass bei zu kleinem n die Singularität nicht genau genug abgebildet wird. Deshalb werden Vergleichsrechnungen für $n = 10, 20, 30$ und 40 durchgeführt (Abb.

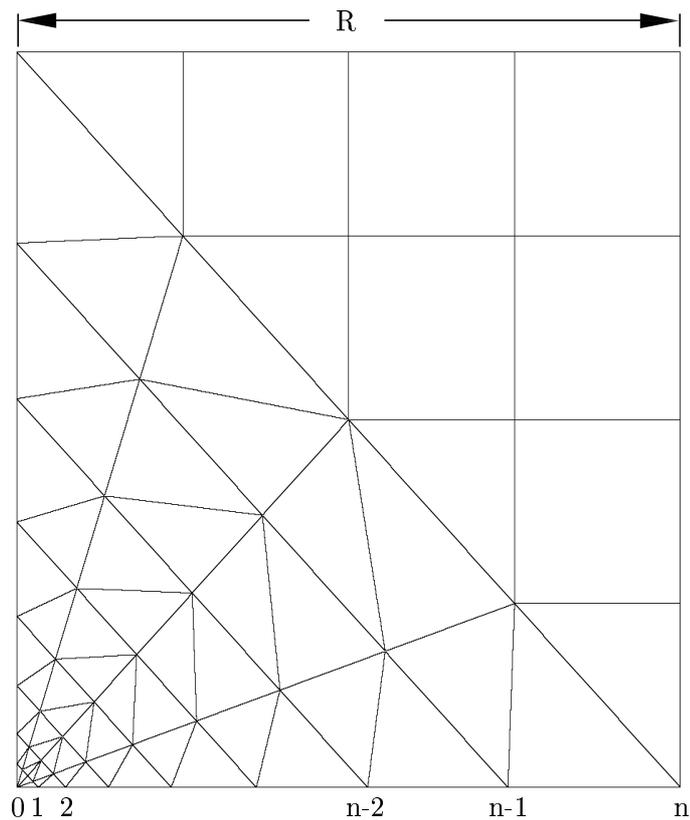


Abb. 5.7: lokal verfeinertes Netz, $n = 10$, $R = 2mm$, $\mu = 0,35$

A.9-A.18). Die Randbedingungen gleichen denen der Varianten 1-3. Bewertet werden wieder die Kontaktspannungen und Vergleichsspannungen. Die entsprechenden Verläufe sind in Abb. A.19 - A.24 gezeigt.

Für $n = 20$ und $n = 30$ liegt eine gute Übereinstimmung der Verläufe vor, sowohl für σ_{vN} , als auch für σ_{rrN} . Als Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Abbildungsgenauigkeit wird $n = 25$ gesetzt.

5.2.6 Optimierung der 2D-Vernetzung

Abgesehen von der Umgebung der Pressfuge und des Wellenabsatzes ist die spannungsmäßige Beanspruchung der Welle-Nabe-Verbindung gering. Um die Anzahl der Freiheitsgrade und damit den Rechenaufwand weiter zu verringern, werden der äußere Teil der Nabe sowie der innere Teil der Welle nur grob vernetzt. Das Ergebnis ist ein optimiertes rotationssymmetrisches Modell mit gradueller Vernetzung, im Weiteren als "2D-grad-fein" bezeichnet (Abb. A.25 - A.28). Das rotationssymmetrische Modell wird später in ein räumliches Modell überführt, wodurch sich die Anzahl der Freiheitsgrade um ein Vielfaches erhöht. Deshalb wird die Variante "2D-grad-grob" mit gleicher Netzstruktur, aber geringerer Netzdichte erstellt (Abb. A.29 - A.32). Damit kann die Knotenanzahl des Modells von 4300 auf 1800 verringert werden.

Verbunden mit der graduellen Vernetzung ist das Auftreten von Drei-Knoten-Elementen im Bereich der Singularität. Diese weisen vor allem zur Singularität hin kleine Innenwinkel auf und könnten damit die Zuverlässigkeit der Rechenergebnisse herabsetzen. Aus diesem Grund wird parallel ein ausschließlich aus Vier-Knoten-Elementen bestehendes FE-Netz erstellt, um die Ergebnisse validieren zu können. Es wird im Weiteren als "2D-quad-fein" bezeichnet und ist in Abb. A.33 - A.34 dargestellt. Die Netzstruktur unterscheidet sich von der Graduellen Vernetzung lediglich im Bereich der Singularität. Analog wird auch hierfür eine Variante "2D-quad-grob" (Abb. A.35 - A.36) mit herabgesetzter Netzdichte erstellt. Die Knotenanzahl verringert sich von 4200 auf 2000.

5.2.7 Vergleich der optimierten 2D-Modelle

Die Auswertung der Kontaktnormalspannungen im mittleren Bereich der Pressfuge für die Modelle 2D-grad-fein und 2D-quad-fein (Abb. A.40) zeigt die gute Übereinstimmung mit dem in Kap. 4.3 und nach DIN 7190 (Kap. 4.2) ermittelten Pressfugendruck.

Durch die Netzverfeinerung in Richtung der Singularität wird diese deutlich genauer als mit den Varianten 1-3 abgebildet (Abb. A.41). Das wird auch durch die Auswertung der Vergleichsspannungen (Abb. A.37-A.38) bestätigt.

Bei detaillierter Betrachtung der Spannungskurven in der direkten Umgebung der Singularität (Abb. A.39 und A.42) wird sichtbar, dass die Verläufe von 2D-grad-fein gleichmäßiger als die von 2D-quad-fein sind und weniger Sprünge aufweisen. Bedingt wird dies dadurch, dass die Elemente bei der graduellen Vernetzung zur Singularität hin gleichmäßig kleiner werden. Das ist in diesem Bereich am Modell 2D-quad-fein nicht der Fall. Nichtsdestotrotz stimmen die Spannungsverläufe der beiden Modelle sehr gut überein. Es reicht deshalb, für die weiteren Betrachtungen in der Ebene bei Annahme von Rotationssymmetrie eines der beiden Modelle zu betrachten. Aufgrund des gleichmäßigeren Kurvenverlaufes zum Pressfugenbeginn hin wird dafür die graduelle Vernetzung 2D-grad-fein gewählt.

5.3 Elastisch-Plastische Analyse - Betrachtung des Meridianschnitts

Schon nach dem Fügevorgang überschreiten die Vergleichsspannungen nach Mises in der direkten Umgebung des Pressfugenbeginns (Abb. A.38) deutlich die in Tabelle 4.4 angegebenen Elastizitätsgrenzen. Eine entsprechende Verringerung der Vergleichsspannungen erfolgt durch plastische Deformation. Dementsprechend wird eine elastisch-plastische Berechnung der Pressverbindung nötig. Im Vorfeld dessen werden Theorien zur analytischen Abschätzung der plastischen Deformation bzw. der daraus entstehenden Spannungen untersucht.

5.3.1 Theoretische Vorbetrachtung

Mikrostützwirkung

Wie in Kap. 5.2.3 beschrieben, streben die Radialspannungen an der Singularität bei idealer Abbildung der Pressverbindung gegen Unendlich. Das Konzept der Mikrostützwirkung nach NEUBER [38] führt an der höchstbeanspruchten Stelle, im vorliegenden Fall der Singularität, ein Gefügeteilchen mit der Breite $\varrho^* = 0,347mm$ ein. Auf dieses werden die Effektivspannungen σ_e bezogen und man erhält nach (5.4) die endliche fiktive Spannung σ_F .

$$\sigma_F = \frac{1}{\varrho^*} \int_{z_0}^{z_0+\varrho^*} \sigma_e dz \quad (5.4)$$

Die Effektivspannung ersetzt dabei definitionsgemäß den mehrachsigen Spannungszustand durch einen äquivalenten einachsigen Spannungszustand.

Bei Anwendung der Gleichung (5.4) auf die ermittelten elastischen Vergleichsspannungen wird eine fiktive Spannung erhalten, welche im elastischen Bereich liegt. Dadurch erhält man keinen Hinweis auf Plastizität, obwohl am Fugenbeginn eine solche auftritt. Des Weiteren liegt an der singulären Stelle ein dreiachsiger Spannungszustand vor, während in [38] lediglich der zweiachsige Spannungszustand betrachtet wird. Auf die Anwendung des Prinzips der Mikrostützwirkung wird deshalb verzichtet.

Stanzdruck auf einen plastischen Körper

Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Spannungsverteilung in einem plastischen Körper stellt SOKOLOWSKIJ in [48] vor. Betrachtet wird das Drücken mit einem scharfkantigen festen Stempel auf eine deformierbare Halbebene. Übertragen auf das vorliegende Problem stellt bei Nabenüberstand die Welle den Stempel dar, mit dem Wellenabsatz als scharfer Kante. Bei Nabenunterstand wechselt dies, da die Nabe mit der Nabenstirnseite als seitliche Begrenzung auf die Welle drückt und demzufolge als Stempel dient. Plastische Deformationen sind sowohl an der Welle als auch an der Nabe zu erwarten, während nach SOKOLOWSKIJ der Stempel nicht deformierbar sein darf. Demzufolge kann das Modell des Gleichgewichts eines Stempels und einer Halbebene nicht angewendet werden.

5.3.2 Fügevorgang für elastisch-plastisches Verhalten

In Erweiterung zum Fügevorgang für rein elastisches Verhalten werden den Werkstoffen, aus welchen Welle und Nabe bestehen, die in Abb. 4.2 abgebildeten Spannungs-Dehnungs-Kurven zugeordnet. Bei Überschreiten der Fließgrenze verformen sich die Tribopartner entsprechend diesen Kurven in den hochbeanspruchten Gebieten. Die übrigen Randbedingungen werden beibehalten.

5.3.3 Auswertung von 2D-grad-fein bei Elasto-Plastizität

Bei rein elastischer Betrachtung des Fügevorganges erreichen die Kontaktnormalspannungen in unmittelbarer Nähe des Pressfugenbeginns sehr hohe absolute Werte (Abb. A.41). Bei elastisch-plastischem Materialverhalten wird aufgrund der Möglichkeit plastischer Deformation eine entsprechende Verringerung der Spannung erwartet. Abb. A.43 zeigt aber, dass für beide Werkstoffpaarungen nach wie vor sehr hohe Druckspannungen in radialer Richtung im Bereich des Fugenbeginns auftreten, vor allem bei Nabenüberstand. Da die Berechnung auf Grundlage der MISESSchen Fließbedingung (2.45) basiert, müssen auch die Spannungskomponenten in axialer Richtung und Umfangsrichtung betrachtet werden. Die Axialspannungsverläufe an der Wellenoberseite (Abb. A.44) zeigen, dass bei Nabenüberstand und in geringerer Form auch bei Nabenunterstand hohe Druckspannungen im Bereich der Singularität herrschen. Werden die axialen und radialen Spannungen miteinander verglichen, so ist festzustellen, dass deren Verlauf nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ in der gleichen Größenordnung liegt. Deutlich wird dies in Abb. A.45 für die Werkstoffpaarung 42CrMo4-16MnCr5. Darin ist auch sichtbar, dass die Umfangsspannungen sich ebenso verhalten. Dass die Vergleichsspannungen an der Wellenoberseite im Bereich des Fugenbeginns (Abb. A.46) deutlich niedrigere Werte als die einzelnen absoluten Spannungskomponenten aufweisen, liegt am großen hydrostatischen Spannungsanteil.

Es stellt sich die Frage, weshalb trotz des reibungsfreien Fügevorganges vor allem bei Nabenüberstand sehr hohe axiale Druckspannungen auftreten. Bei Betrachtung der gefügten Verbindung (Abb. A.47) wird sichtbar, dass der über den Wellenabsatz hinausragende Teil der Nabe sich beim Abkühlen über diesen wölbt. Sowohl Welle als auch Nabe verformen sich infolge der hohen Kantenpressung an der Fugenkante plastisch (Abb. A.48-A.49). Die Wölbung der Nabe über den Wellenabsatz wird dadurch noch verstärkt und es entsteht eine Art Formschluss zwischen Welle und Nabe. Während des Abkühlvorganges treten zwei Effekte auf. Aufgrund des abnehmenden Wellenaußendurchmessers (Kap. 4.3) ist das Material der Welle im Mittelteil der Pressfuge bestrebt, sich in axiale Richtung aus dem Pressungsbereich herauszubewegen. Gleichzeitig zieht sich die Nabe in axialer Richtung zusammen und drückt das Material an der Wellenoberseite an der Fugenkante durch den Formschluss in die entgegengesetzte Richtung. Verdeutlicht wird dies in den Abb. A.50-A.51. Darin werden die positiven Dehnungen dargestellt, Gebiete mit Stauchung in axialer Richtung sind weiß gekennzeichnet.

Auch bei Nabenunterstand sind axiale Druckspannungen im Bereich der singulären Stelle zu beobachten. Im Gegensatz zum Nabenüberstand kann sich kein Formschluss ausbilden, wie Abb. A.52 zeigt. Die plastische Deformation ist geringer und betrifft lediglich die Nabe (Abb. A.53). Trotzdem treten auch bei Nabenunterstand axiale Stauchungen im Bereich des Fugenbeginns auf (Abb. A.54-A.55) und verursachen die Druckspannungen in axialer Richtung. Eine eindeutige Begründung für dieses Verhalten kann an dieser Stelle nicht gefunden werden.

5.4 Überführung in den 3D-Raum

Um das FEM-Modell rotationssymmetrisch betrachten zu können, müssen nach Kap. 2.3.2 auch die Belastungen axialsymmetrisch sein. Während das für den Fügevorgang der Fall ist, wird diese Bedingung beim Aufbringen eines Biegemomentes entsprechend der Aufgabenstellung nicht erfüllt. Wird für das ebene Modell die Rotationssymmetrie aufgegeben, kann der Vorgang des Fügens nicht mehr simuliert werden. Grund hierfür ist, dass es nicht möglich ist, Randbedingungen zu definieren, welche das Verhalten des Pressverbandes adäquat darstellen. Deshalb wird das 2D-Modell in den 3D-Raum überführt. Problematisch ist dabei die Vielzahl der entstehenden Freiheitsgrade. Eine zu grobe Vernetzung führt zu ungenauen Ergebnissen. Wird zu fein vernetzt, entstehen zu viele Freiheitsgrade und ein immenser Rechenaufwand ist die Folge. Für die Simulation von Umlaufbiegung ist ein komplettes 360° -Modell nötig. Deshalb erfolgt eine Beschränkung auf statische Biegung, womit die Modellierung eines Halbmodells ausreichend ist. Dessen Erstellung erfolgt durch Expansion der 2D-Modelle 2D-grad-grob und 2D-quad-grob in Umfangsrichtung. Die entsprechenden FE-Netze sind in Abb. A.56-A.61 dargestellt und unterscheiden sich untereinander wie in der Ebene lediglich im Bereich der Singularität.

Durch die Expansion der ebenen Modelle entstehen in der Umgebung des Fugenbeginns Elemente mit großen Seitenverhältnissen. Die Drei-Knoten-Elemente bei der graduellen Vernetzung weisen zusätzlich kleine Innenwinkel auf. Während die ungünstigen Seitenverhältnisse die Konvergenz der Berechnungen des Modells 3D-quad nicht negativ beeinflusst, ist dies bei der graduellen Vernetzung 3D-grad der Fall. Schon für $n = 8$ wird die Konvergenz deutlich schlechter. Wird n noch erhöht, konvergiert das Modell gar nicht. Die mögliche Auflösung im Bereich der Singularität ist demzufolge für das Modell 3D-grad stark begrenzt.

5.5 Elastisch-Plastische Analyse im 3D-Raum

5.5.1 Definition der Lastfälle

Um den Fügevorgang und die anschließende Biegebelastung simulieren zu können, werden entsprechende Randbedingungen definiert und den FE-Netzen zugeordnet.

Die $z - \varphi$ -Ebene für $\varphi = 0^\circ$ stellt die Symmetrieebene des Halbmodells dar. Allen darin befindlichen Elementknoten wird die Verschiebungsrandbedingung $u_\varphi = 0$ zugeordnet.

Das Fügen der Tribopartner wird analog zum ebenen Modell (Kap. 5.2.2) modelliert. Für den Belastungsfall erfolgt die Fixierung von Welle und Nabe nach dem Vorbild des Versuchsaufbaus von GROPP [20], welcher in Abb. 5.8 dargestellt ist.

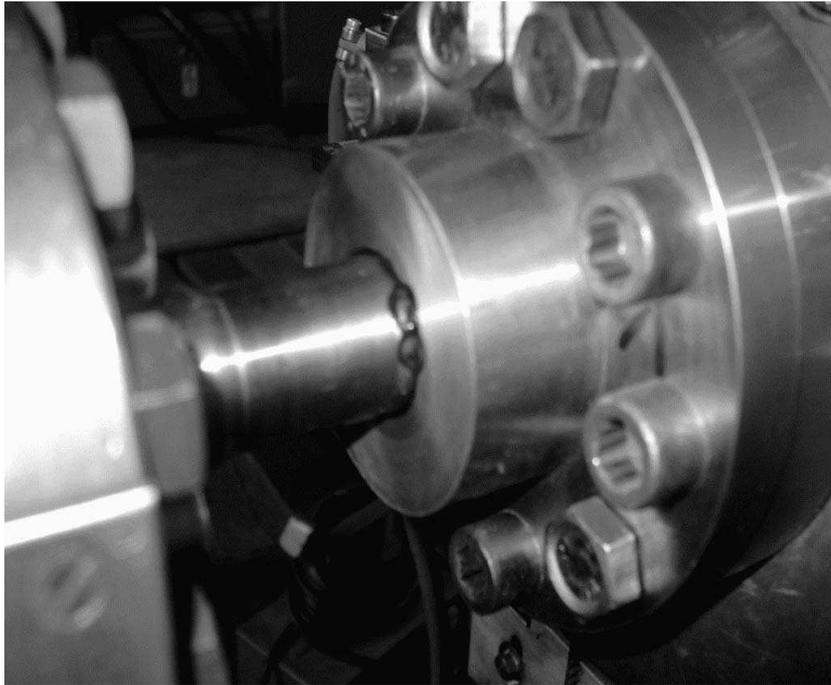


Abb. 5.8: Foto der Versuchsanordnung [21]

Die Pressverbindung wird dabei nicht mehr reibungsfrei betrachtet. Zur Anwendung kommt vielmehr das von MARC/MENTAT bereitgestellte Modell der COULOMBSchen Reibung [35]. Der Reibfaktor wird nach Aufgabenstellung zu $\mu = 0,2$ festgelegt. Verschiebungsrandbedingungen in axialer Richtung für die Nabe sind demnach nicht mehr notwendig. Zusätzlich muss die Kontaktgeschwindigkeit v_c angegeben werden, deren Wert nach [47] für Zylinderpressverbindungen $1,0 \cdot 10^{-3}$ beträgt.

Nach dem Fügen der Pressverbindung wird die wechselnde Biegebelastung aufgebracht. Dafür wird das Biegemoment $M_b = \pm 200 Nm$ in eine Kraft umgerechnet, welche an der Stirnfläche der Welle angreift. Der Abstand dieser zum Wellenabsatz beträgt im Modell $76 mm$, womit sich die entsprechende Kraft von $F_b = \pm 2632 N$ ergibt. Der Lasteintrag erfolgt verteilt auf die Knoten der gesamten Stirnfläche. Der Vorgang der Wechselbiegung besteht aus folgenden Schritten:

- Gleichmäßiges Erhöhen der Kraft in der Stirnfläche bis zu $F_b = 2632 N$, was eine Bewegung des Wellenendes nach oben zur Folge hat.
- Gleichmäßiges Absenken der Kraft auf $F_b = -2632 N$, wodurch das Wellenende nach unten gebogen wird.
- Steigern der Kraft bis $F_b = 0$, was mit einer teilweisen Rückbewegung in den Ausgangszustand verbunden ist.

Dieser Zyklus wird mehrfach durchgeführt, um ein Einspielverhalten der Pressverbindung zu simulieren.

5.5.2 Auswertung des 3D-Modells nach dem Fügen

Um einen Vergleich der 3D-Modelle mit den feiner vernetzten 2D-Modellen zu erhalten, werden deren axiale Spannungen und Radialspannungen an der Wellenoberseite im Fugenbereich betrachtet. Wie in den Abb. A.62-A.65 dargestellt, liegen σ_{rrW} und σ_{zzW} im Bereich der Singularität deutlich unterhalb der in der Ebene ermittelten Spannungen. Dies wird vor allem durch zwei Faktoren bedingt:

- In Kap. 5.2.5 wurde festgestellt, dass bei steigender Vernetzungsdichte die Singularität zunehmend besser abgebildet wird. Die 3D-Modelle sind in diesem Bereich gröber vernetzt als die ausgewerteten 2D-Modelle. Die Singularität wird entsprechend schlechter abgebildet.
- Die Berechnung erfolgt im 3D-Raum nicht mehr rotationssymmetrisch. Durch Expansion des ebenen Modells in Umfangsrichtung kann der Fugendurchmesser nur näherungsweise nachgebildet werden, da dieser als Polygonzug approximiert wird, welcher in 1. Näherung den gleichen Querschnitt aufweist. Das hat zur Folge, dass sich die Spannungskomponenten nicht nur in Abhängigkeit von r und z ändern, sondern auch für verschiedene φ Unterschiede aufweisen.

Bedingt durch die grobe Abbildung der Singularität für das Modell 3D-grad (Kap. 5.4) sind die erhaltenen Spannungsverläufe von 3D-quad am Fugenbeginn deutlich genauer. Deshalb wird im Folgenden nur auf das Modell 3D-quad Bezug genommen.

Im Gegensatz zum 2D-Modell stimmt die Kontaktnormalspannung im Mittelteil der Pressfuge mit $\sigma_{rr} = 90 \text{ N/mm}^2$ nicht genau mit dem theoretisch ermittelten Fugendruck von $p = 110 \text{ N/mm}^2$ überein.

5.5.3 Auswertung des 3D-Modells nach Belastung

Dem Versagen der Pressverbindung in Folge von Reibdauerbeanspruchung geht die Entstehung eines Anrisses innerhalb der Pressfuge voraus (Kap. 3). Dieser kann nur durch Zugspannungen initiiert werden [21], die an der Wellenoberseite auftreten, wenn das Wellenende nach unten gebogen wird (Abb. 5.9).

Für die Beurteilung der Reibdauerfestigkeit der Welle werden folgende Größen betrachtet:

- **Schlupfamplitude s** Sie wird bei der Berechnung des FFDP (3.7) benötigt. Außerdem stellt sie bei Vergleich mit dem Grenzschlupf s_g nach LEIDICH (Kap. 3.3.2) ein Entscheidungskriterium für das Auftreten von Reibkorrosion dar.
- **Schlupftiefe l_g** Durch diese wird die Länge des Bereiches gekennzeichnet, in welchem Passungsrost auftritt.
- **Axialspannung σ_{zzW}** Sie stellt die rissinitiierende Ursache dar.

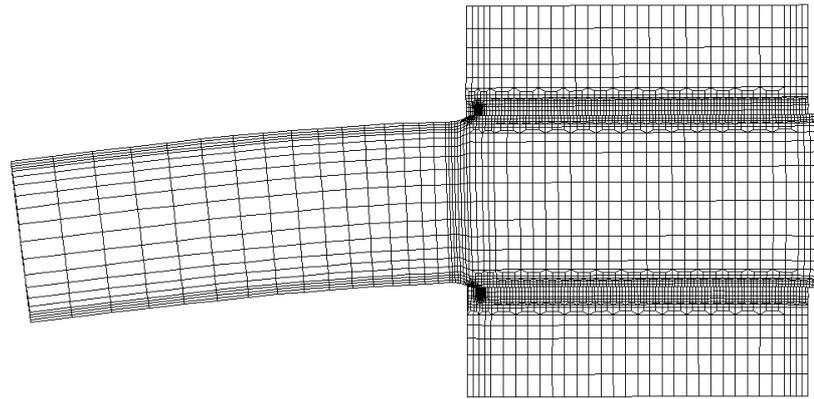


Abb. 5.9: Verformung von 3D-quad bei Biegung nach unten

- **Kontaktnormalspannung σ_{rrW}** Bei Multiplikation mit dem Reibfaktor μ ergibt sich die Schubspannung, bei deren Überschreitung Gleiten auftritt und damit das Schlupfverhalten im Kontaktgebiet maßgeblich beeinflusst.

Die Schlupfamplitude s stellt die Relativbewegung zwischen einem Punkt auf der Wellenoberfläche und dem auf der Nabeninnenseite gegenüberliegenden Punkt zwischen zwei Belastungszuständen (z.B. Biegung von oben nach unten) dar. Da die Pressverbindung ausschließlich Wechselbiegung erfährt, kann nur in axialer Richtung Schlupf austreten. Liegt die Schlupfamplitude unter dem tribologisch unschädlichen Schlupf s_{zul} , tritt keine Reibkorrosion auf. Nach der Berechnungsvorschrift (3.3) von LEIDICH hängt s_{zul} vom Fugendruck p ab. Damit ergibt sich für $s_g = 1\mu m$ eine zulässige Schlupfamplitude von

$$\begin{aligned}
 s_{zul} &= \frac{100 \frac{N}{mm^2} \cdot 1\mu m}{p} \\
 &= \frac{100 \frac{N}{mm^2} \cdot 1\mu m}{110 \frac{N}{mm^2}} \\
 &= 0,9\mu m
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Die Ermittlung von s in der Pressfuge erfolgt durch folgende Vorschrift:

$$s = (u_{zN2} - u_{zW2}) - (u_{zN1} - u_{zW1}) \tag{5.6}$$

Dabei stellen u_{zN1} und u_{zW1} die axialen Verschiebungen von Nabe und Welle im Zustand 1 ($+F_b$) sowie u_{zN2} und u_{zW2} die axialen Verschiebungen von Nabe und Welle im Zustand 2 ($-F_b$).

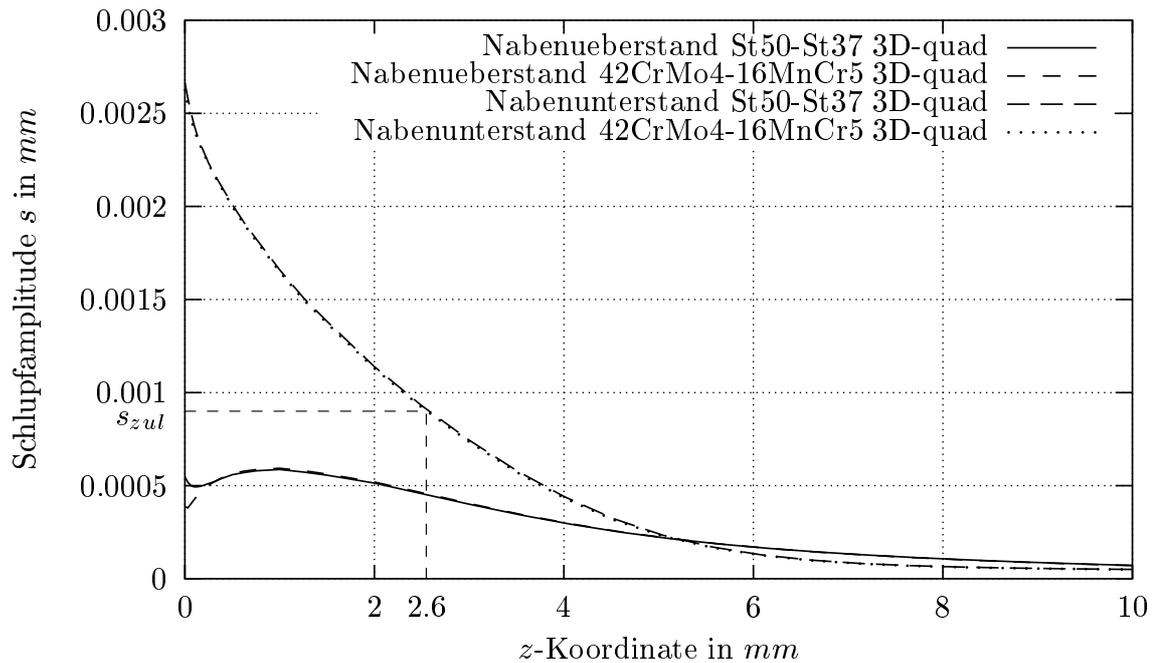


Abb. 5.10: Schlupfamplitude für Wechselbiegung von Zustand 1 nach Zustand 2

Wie in Abb. 5.10 sichtbar, wird bei Nabenuberstand die zulässige Schlupfamplitude nicht überschritten. Demzufolge entsteht auch keine Reibkorrosion. Bei Nabenunderstand ist s im Bereich des Fugenbeginns größer als s_{zul} . Die Schlupftiefe l_g wird demnach zu $l_g = 2,6\text{mm}$ ermittelt. Die Schlupfamplitudenverläufe der jeweiligen Materialpaarungen weichen kaum voneinander ab. Lediglich bei Nabenuberstand ist in unmittelbarer Nähe der Singularität die Schlupfamplitude bei St50-St37 etwas größer als bei 42CrMo4-16MnCr5. Im Bereich der Fuge für $z > 10\text{mm}$ verläuft die Schlupfamplitude für Nabenuberstand und Nabenunderstand nahe Null.

Wie zu erwarten, sind die Kontaktnormalspannungen (Abb. A.66-A.67) in der Umgebung der Singularität im Zustand 1 deutlich niedriger als im Zustand 2, da die Wellenoberseite bei Biegung nach unten in radialer Richtung entlastet wird. Dabei ist der Betrag der Radialspannung bei Nabenuberstand mehr als doppelt so hoch als bei Nabenunderstand. Dementsprechend sind auch die Reibschubspannungen bei Nabenuberstand deutlich höher, was einen geringeren Schlupf begünstigt. Zur Mitte der Fuge hin verbleibt die Radialspannung für Nabenuber- und unterstand bei den schon nach dem Fügen ermittelten ca. 90 N/mm^2 .

Die Auswertung der Axialspannungen an der Wellenoberseite zeigt große Unterschiede zwischen Nabenuber- und unterstand auf. Bei Nabenunderstand treten im Zustand 2 infolge der Biegung entlang der gesamten Pressfuge Zugspannungen auf (Abb. A.70-A.71). Die nach dem Fügen vorhandenen Druckspannungen sind nicht mehr vorhanden, da die Relativbewegung der Welle zur Nabe lediglich durch die Reibschubspannung behindert wird. Im Zustand 1 tritt diese Relativbewegung gleichfalls auf, allerdings in die entgegengesetzte Richtung. In Folge dessen sind die entstehenden axialen Druckspannungen noch größer als nach dem Fügevorgang.

Ein derartiges Verhalten ist bei Nabenüberstand (Abb. A.68-A.69) nicht zu beobachten. Behindert durch den in Kap. 5.3.3 beschriebenen Formschluss ist nur ein teilweiser Abbau der Druckspannungen möglich, Zugspannungen treten gar nicht auf. Da das Vorhandensein von Zugspannungen Voraussetzung für eine Rissinitiierung ist, kann ein solcher bei der gegebenen Biegebelastung in der Welle bei Nabenüberstand nicht entstehen. Demzufolge kann für die gegebene Biegebelastung bei Nabenüberstand kein Reibdauerbruch auftreten.

Bei Nabenunterstand sind dagegen alle Bedingungen für Reibdauerbruch erfüllt. Der Ort des Anrisses soll mit Hilfe des Ruiz-Chen-Kriteriums ermittelt werden. Die nach (3.7) zur Berechnung des FFDP notwendigen Größen sind bekannt. Der FFDP ergibt sich demnach zu

$$FFDP = \sigma_{zzW} \cdot \tau_{rz} \cdot s \quad (5.7)$$

Der entsprechende Verlauf ist in Abb. A.72 dargestellt. Der maximale Wert der Funktion und damit der wahrscheinliche Anrissort liegt vom Fugenbeginn aus ca. 0,2 mm innerhalb der Pressfuge.

Zusätzlich zur Untersuchung auf Reibdauerbruch wird die Dauerbruchfestigkeit überprüft. Zu diesem Zweck werden die Vergleichsspannungen im Bereich des Wellenübergangs betrachtet. Der Wellenabsatz endet für Nabenüberstand genau am Pressfugenbeginn. An dieser Stelle gilt $z = 0$. Diese Vereinbarung wird für Nabenunterstand übernommen, damit die Wellen in axialer Richtung miteinander vergleichbar sind. Aus Abb. A.73 geht hervor, dass während Zustand 1 im Wellenübergang bei Nabenüberstand sehr große Vergleichsspannungen vorliegen. Diese erreichen für beide Materialpaarungen den Bereich der Elastizitätsgrenze. Für Nabenunterstand liegen die Vergleichsspannungen im unkritischen Bereich. Im Zustand 2 (Abb. A.74) sind diese ebenfalls unbedenklich.

5.5.4 Bewertung der Ergebnisse des 3D-Modells

Durch GROPP wurde an Pressverbindungen mit den gleichen Abmessungen, Werkstoffpaarungen und Biegebelastungen des hier betrachteten Modells experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Die daraus gewonnen Erkenntnisse sind in [20], [21] zu finden.

Diese bestätigen, dass die Pressverbindung bei Nabenüberstand keine Reibkorrosion aufweist und kein Reibdauerbruch auftritt. Allerdings treten am Wellenübergang teilweise Dauerbrüche auf, was auf die ermittelten hohen Vergleichsspannungen in diesem Bereich belegt wird (Abb. A.73).

Bei Nabenunterstand wird die zulässige Schlupfamplitude überschritten. In Folge dessen kommt es zur Passungsrostbildung. Das bestätigen die experimentellen Untersuchungen. Die rechnerisch ermittelte Schlupftiefe $l_g = 2,6\text{mm}$ stimmt mit der experimentell erhaltenen nicht überein. Die Schlupftiefe aus den Experimenten beträgt ca. 6mm vom Fugenbeginn an. Der mittels der FEM ermittelte Schlupf hängt stark vom verwendeten Reibungsmodell und den zugehörigen Parametern ab. Durch

Variation der Kontaktgeschwindigkeit v_c (siehe auch [52]) bzw. Verwendung eines anderen Reibungsmodells wäre eine Änderung des Schlupfes entsprechend den Experimenten möglich. Der mit Hilfe des Ruiz-Kriteriums ermittelte wahrscheinliche Anrissort muss ebenfalls kritisch betrachtet werden. Die Versuche zeigen, dass der Anriss für 42CrMo4-16MnCr5 ca. 4mm und für St50-St37 ca. 3mm vom Fugenbeginn entfernt auftritt.

Ein Versagen in Folge von Dauerbeanspruchung tritt in den Versuchen bei Nabenüberstand nicht auf. Die ermittelten niedrigen Vergleichsspannungen im Wellenübergang bestätigen das.

Laut DIN 743 [10] beeinflusst der Presssitz die Kerbwirkung im Wellenübergang nur wenig. In Kap. 4.4 wurde auf Grundlage der DIN 743 für die Welle aus 42CrMo4 eine Sicherheit von 2 und für St50 eine Sicherheit von 3,7 gegen Dauerbruch errechnet. Dem entgegen stehen bei Nabenüberstand die ermittelten hohen Vergleichsspannungen in diesem Bereich sowie das Auftreten von Dauerbrüchen in den Versuchen. Dafür verantwortlich ist die Überlappung der Nabe am Wellenübergang und in Folge dessen wird die Dauerfestigkeit stark herabgesetzt. Die in DIN 743 getroffene Aussage ist demnach kritisch zu betrachten.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Kraftschlüssige Welle-Nabe-Verbindungen besitzen im Maschinenbau eine große Bedeutung. Detaillierte Kenntnisse über deren Eigenschaften sind die Voraussetzung für einen erfolgreichen, schadensfreien Einsatz. Die Methode der finiten Elemente stellt ein vielseitiges Werkzeug zur numerischen Simulation dar. Mit deren Hilfe sind Untersuchungen von Pressverbindungen möglich, die in Experimenten nicht oder nur mit erheblichem Aufwand durchgeführt werden können.

Die vorliegende Arbeit analysiert und vergleicht das Verhalten von Pressverbindungen in Abhängigkeit von Nabenüber- und -unterstand. Dabei wurden zunächst klassische Berechnungen nach DIN 743 und DIN 7190 sowie die kontinuumsmechanische Betrachtung der Verbindung durchgeführt. Des Weiteren wurden das Phänomen der Reibkorrosion und seine Folgen betrachtet.

Den Hauptteil der Arbeit stellt die numerische Simulation der Pressverbindung dar. Diese erfolgte zunächst im zweidimensionalen, später im 3D-Raum. Dabei wurden Belastungen auf die Welle-Nabe-Verbindung in Form von thermischer Fügung sowie Einleitung von Wechselbiegung aufgebracht. Das auftretende Problem von Ecken-singularitäten wurde analysiert und entsprechend gelöst.

Die gewonnenen Ergebnisse lassen die Aussage zu, dass sich das Verhalten von Pressverbindungen mit Nabenüberstand deutlich von dem mit Nabenunterstand unterscheidet. Erstere weisen gute Eigenschaften in Bezug auf die Reibdauerefestigkeit auf, sind gegen Dauerbruch aber anfälliger als Verbindungen mit Nabenunterstand. Bei diesen wiederum tritt Reibkorrosion auf, welche das Versagen der Verbindung zur Folge hat.

Eine Weiterführung der Arbeit könnte darin bestehen, das verwendete COULOMBsche Reibungsmodell genauer zu untersuchen und eventuell durch ein anderes zu ersetzen. Der komplexe Vorgang der Reibung würde dadurch besser abgebildet werden. Des Weiteren würde eine Variation von Nabenüber- und -unterstand mit anschließender Auswertung analog zur vorliegenden Arbeit dabei helfen, Regeln zur Bestimmung des optimalen Presssitzes zu finden.

Anhang A

Abbildungen

Für alle Diagramme gilt, dass die z-Koordinate den Abstand vom Kontaktfugenbeginn beim Wellenabsatz darstellt. Bei Nabenüberstand liegt diese genau auf dem Wellenabsatz, bei Nabenunterstand 2mm davon entfernt.

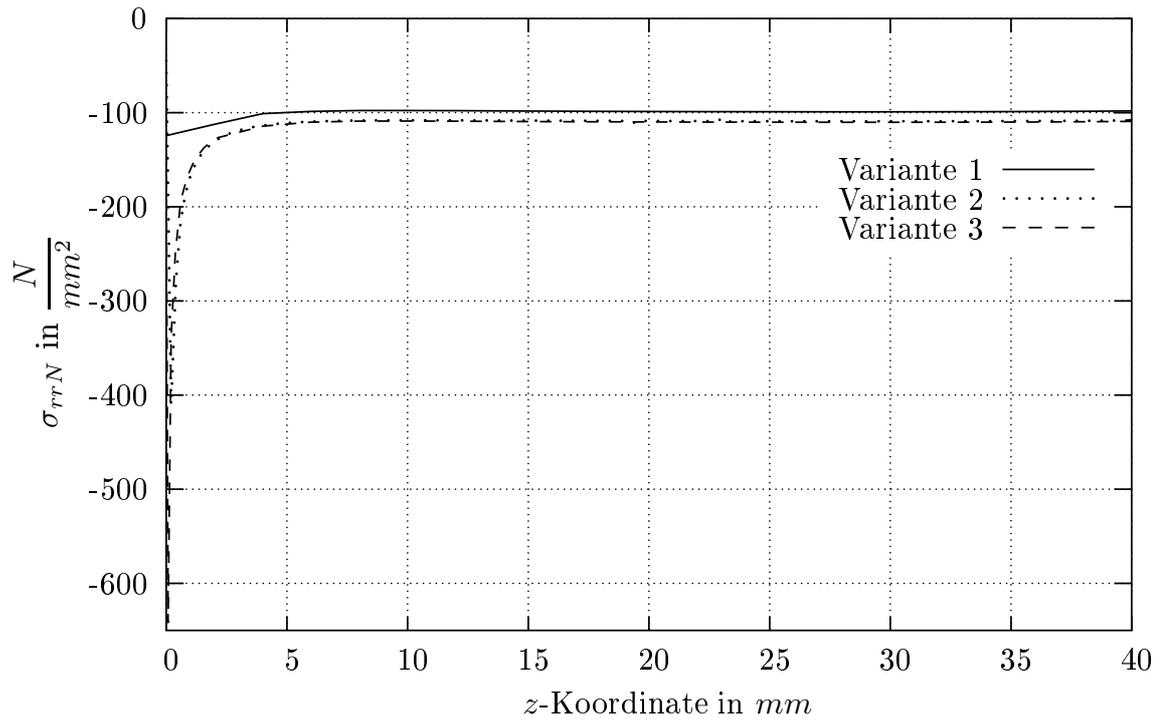


Abb. A.1: Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..40mm$ bei Nabenüberstand

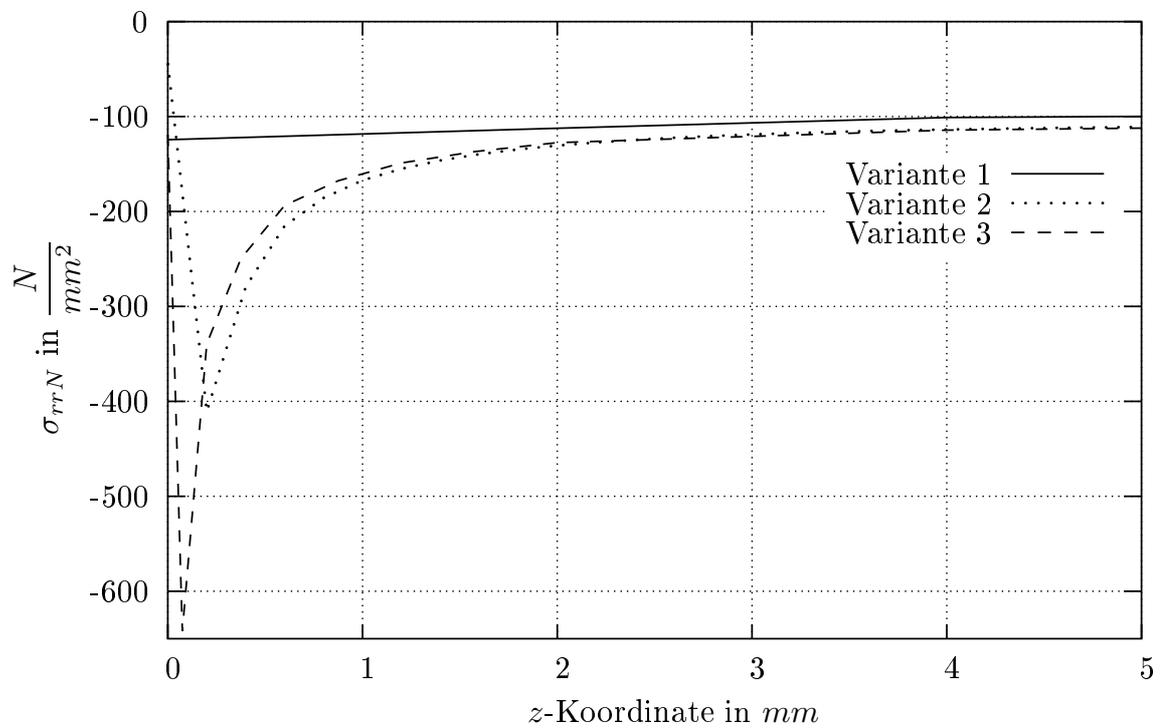


Abb. A.2: Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..5mm$ bei Nabenüberstand

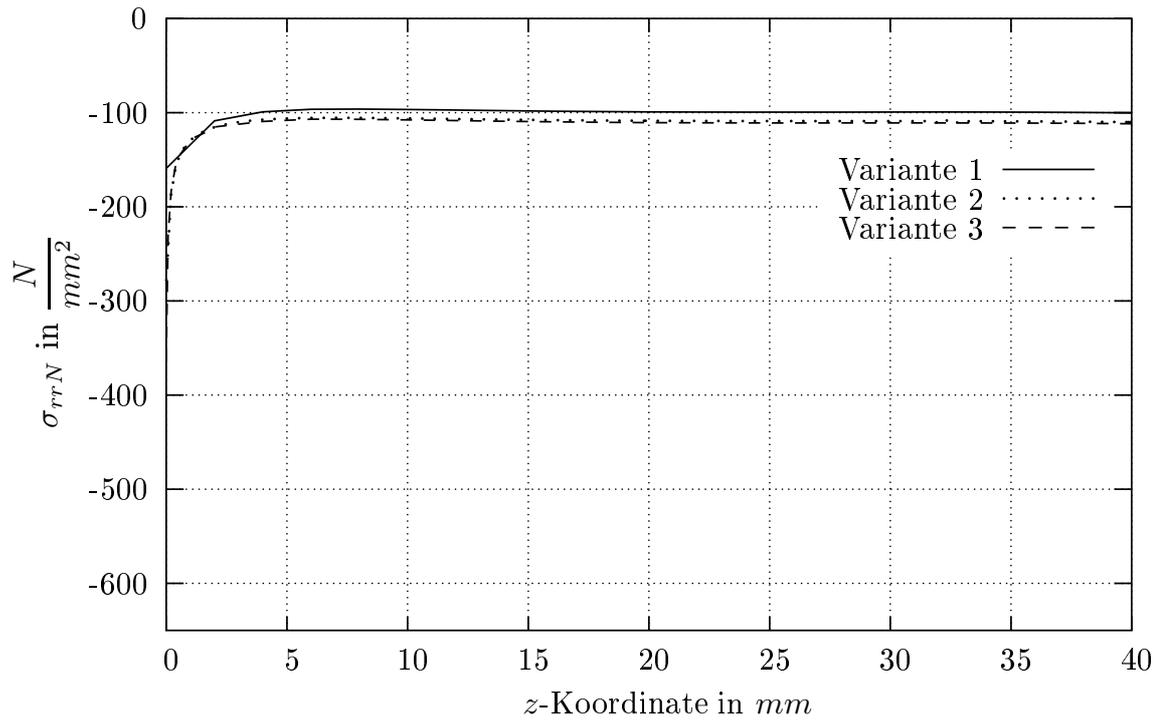


Abb. A.3: Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..40mm$ bei Nabenunterstand

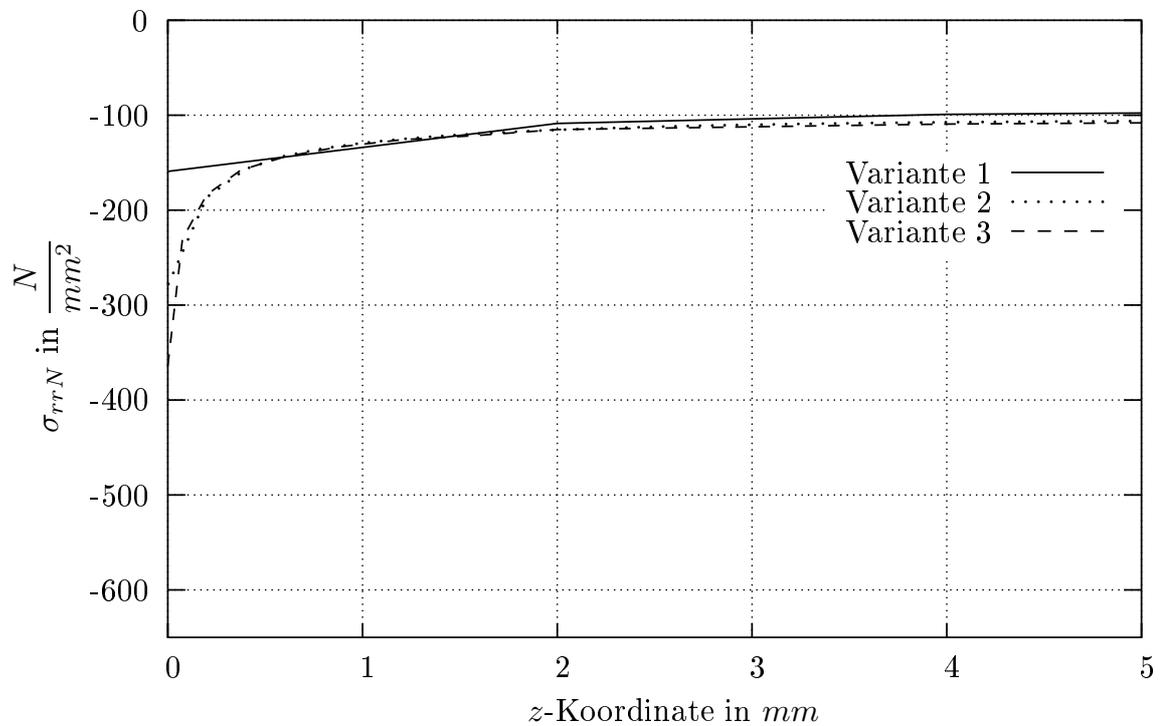


Abb. A.4: Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..5mm$ bei Nabenunterstand

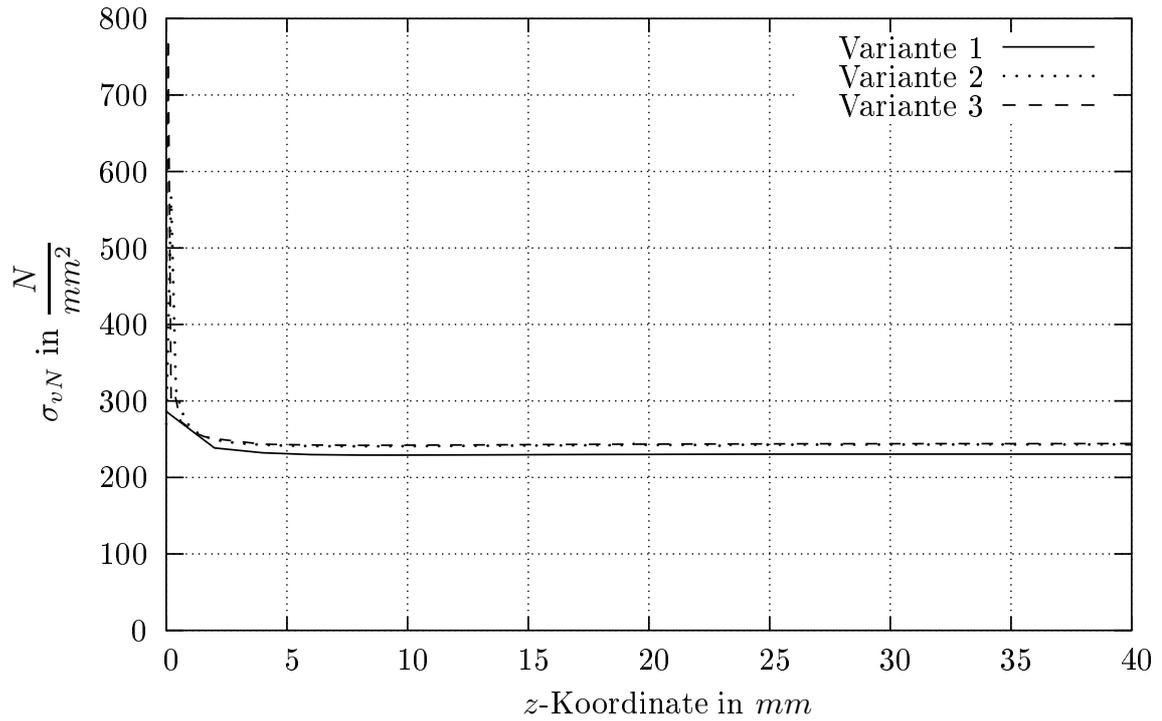


Abb. A.5: Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..40mm$ bei Nabenüberstand

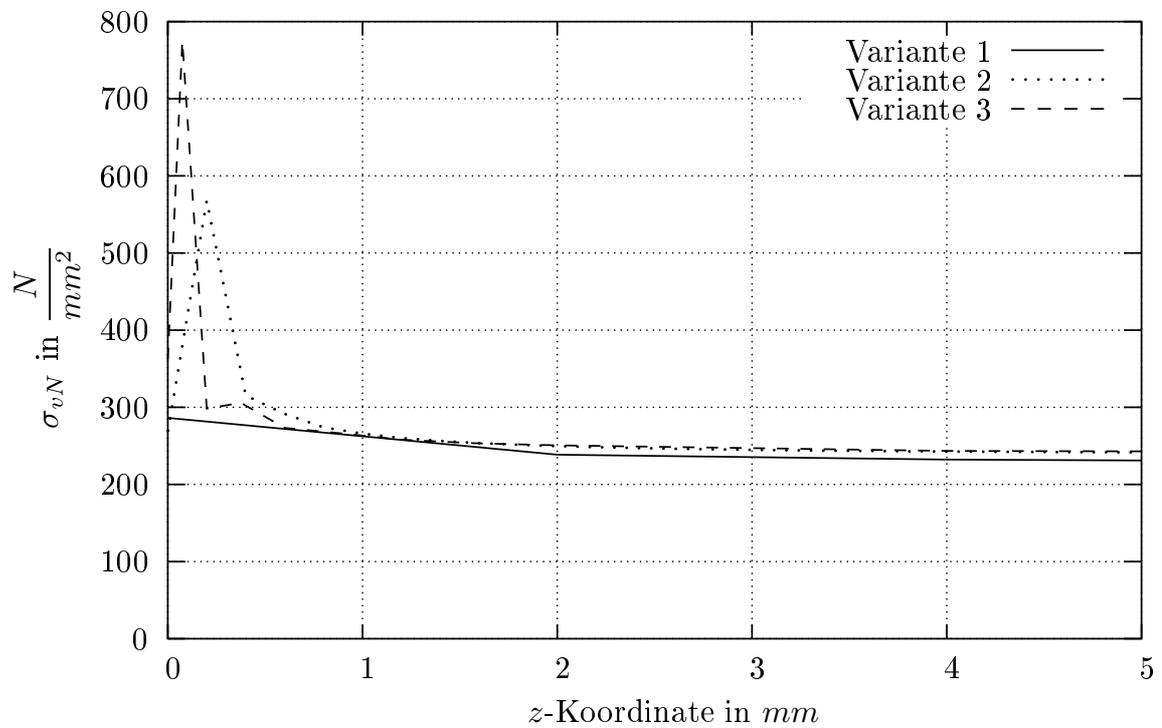


Abb. A.6: Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..5mm$ bei Nabenüberstand

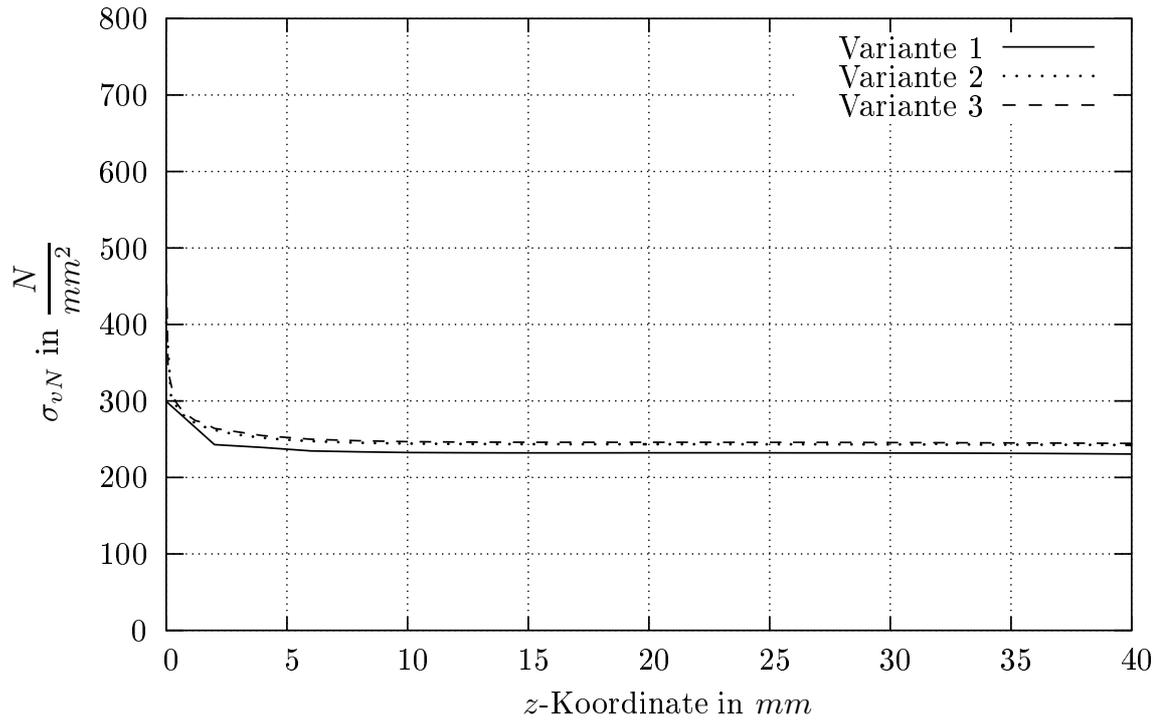


Abb. A.7: Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..40mm$ bei Nabenunterstand

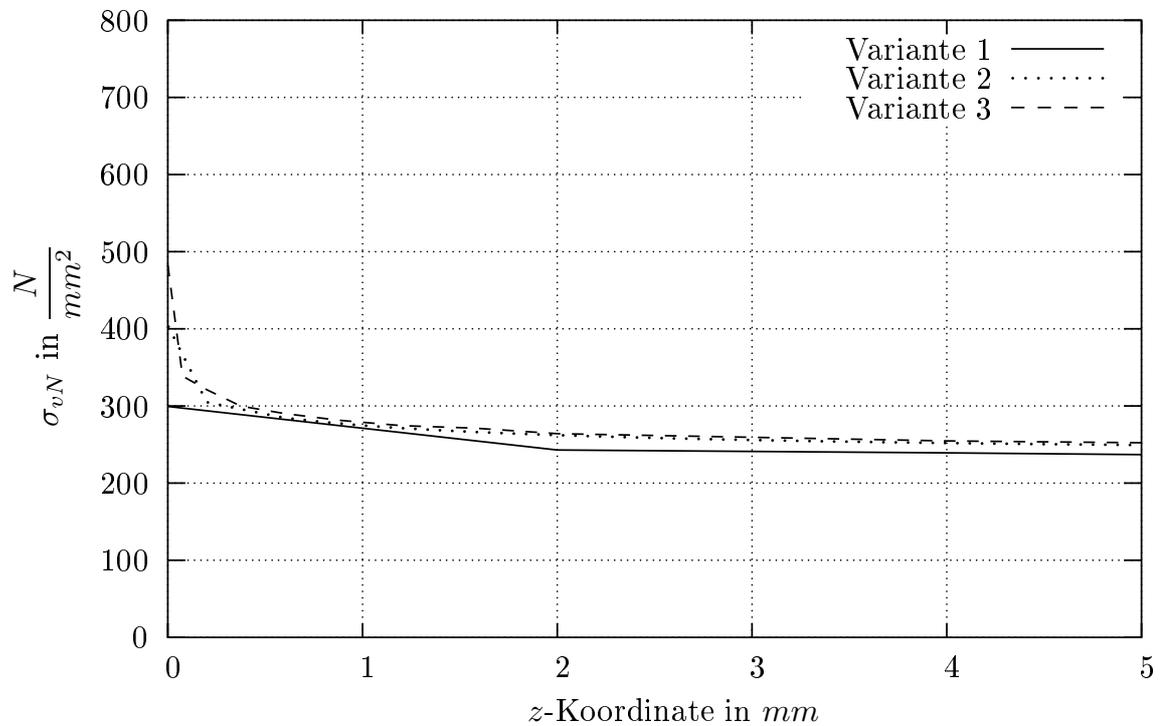


Abb. A.8: Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite der Varianten 1-3 im Bereich $z = 0..5mm$ bei Nabenüberstand

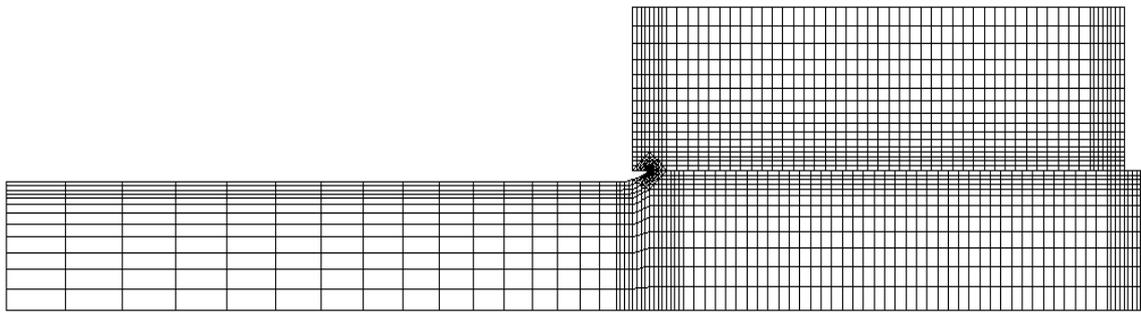


Abb. A.9: Graduelle Vernetzung für $n=10$ bei Nabenüberstand

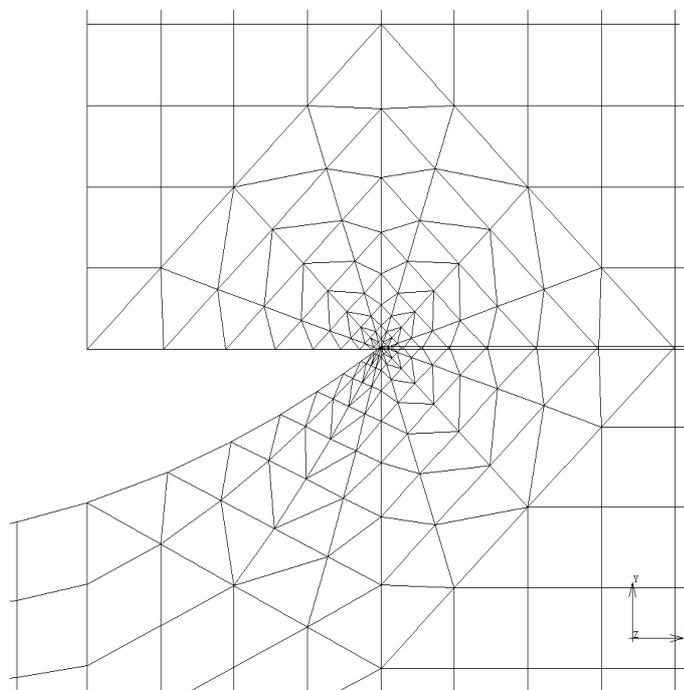


Abb. A.10: Graduelle Vernetzung für $n=10$ bei Nabenüberstand - Detail

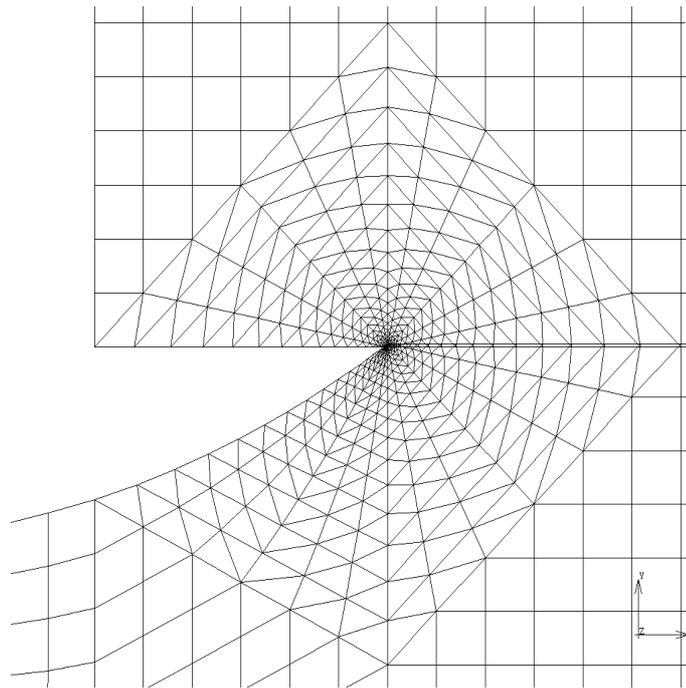


Abb. A.11: Graduelle Vernetzung für $n=20$ bei Nabenüberstand - Detail

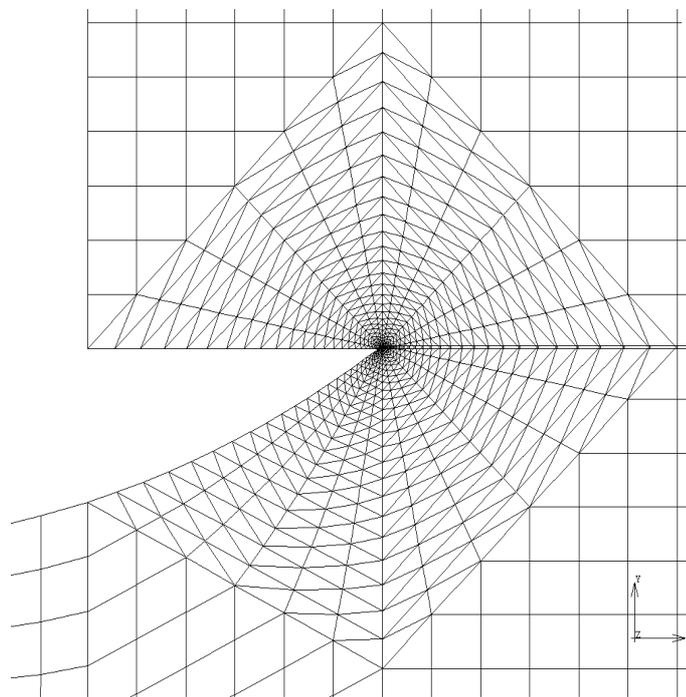


Abb. A.12: Graduelle Vernetzung für $n=30$ bei Nabenüberstand - Detail

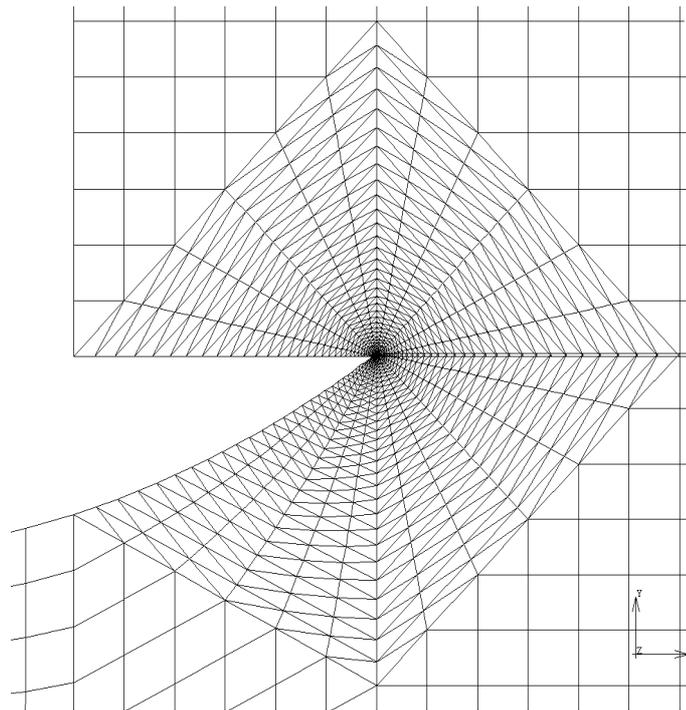


Abb. A.13: Graduelle Vernetzung für $n=40$ bei Nabenüberstand - Detail

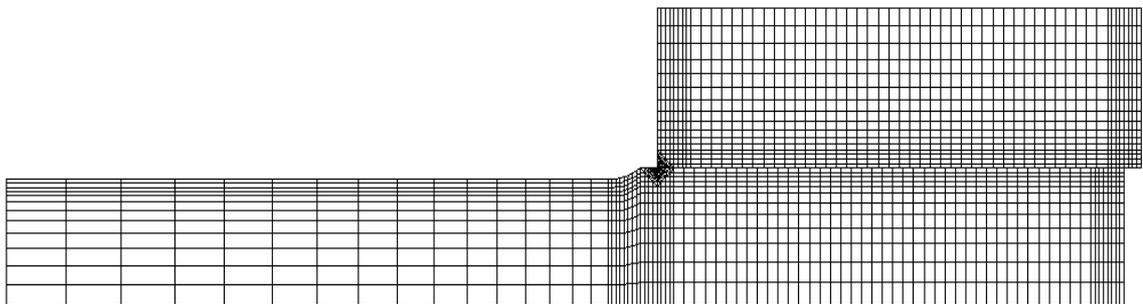


Abb. A.14: Graduelle Vernetzung für $n=10$ bei Nabenunterstand

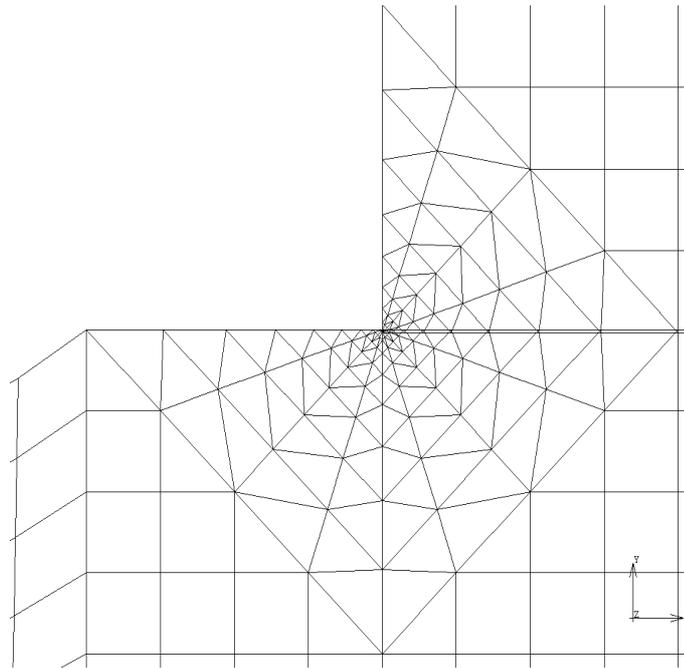


Abb. A.15: Graduelle Vernetzung für $n=10$ bei Nabenunterstand - Detail

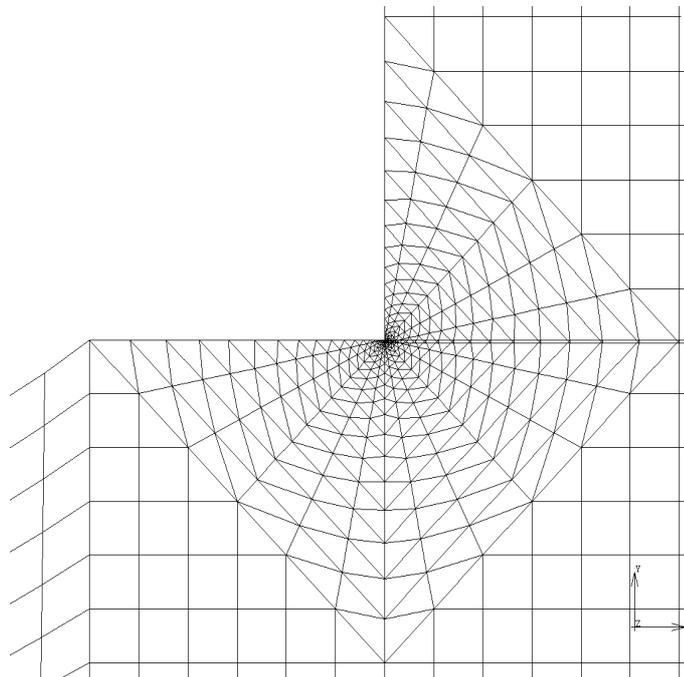


Abb. A.16: Graduelle Vernetzung für $n=20$ bei Nabenunterstand - Detail

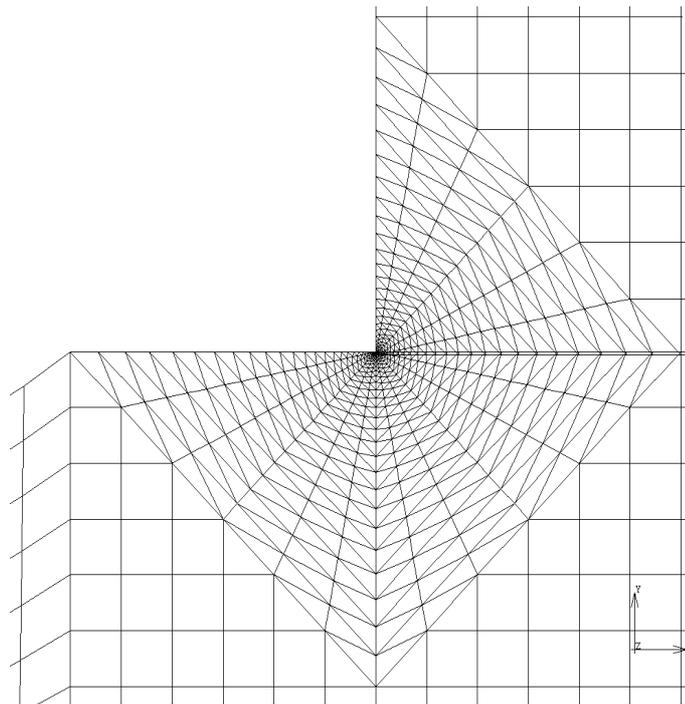


Abb. A.17: Graduelle Vernetzung für $n=30$ bei Nabenunterstand - Detail

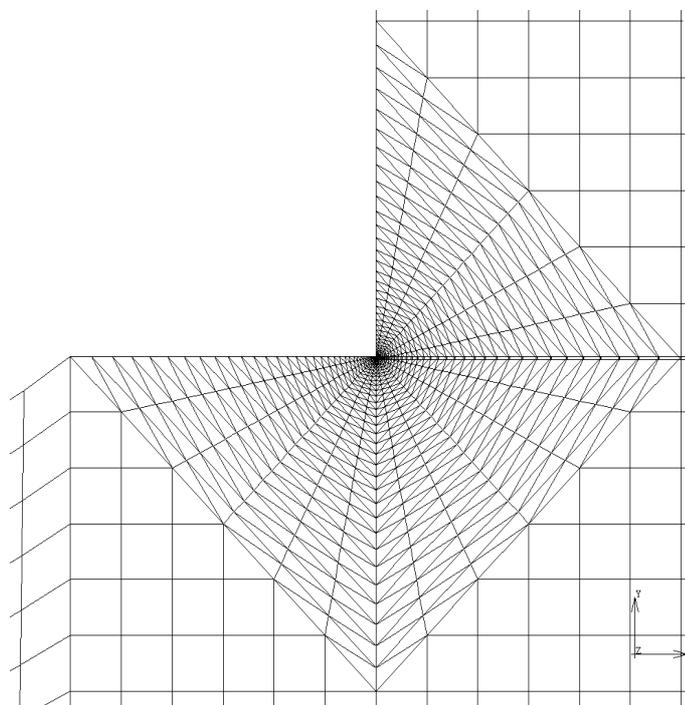


Abb. A.18: Graduelle Vernetzung für $n=40$ bei Nabenunterstand - Detail

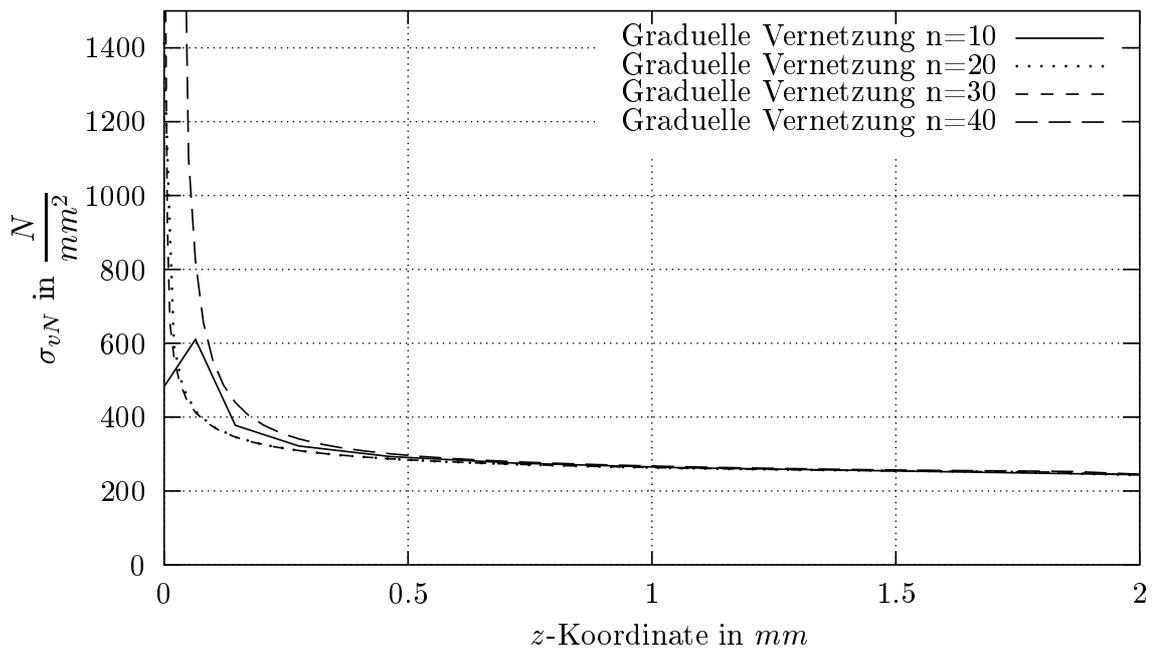


Abb. A.19: Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für n=10,20,30,40 der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..2mm$ bei Nabenüberstand

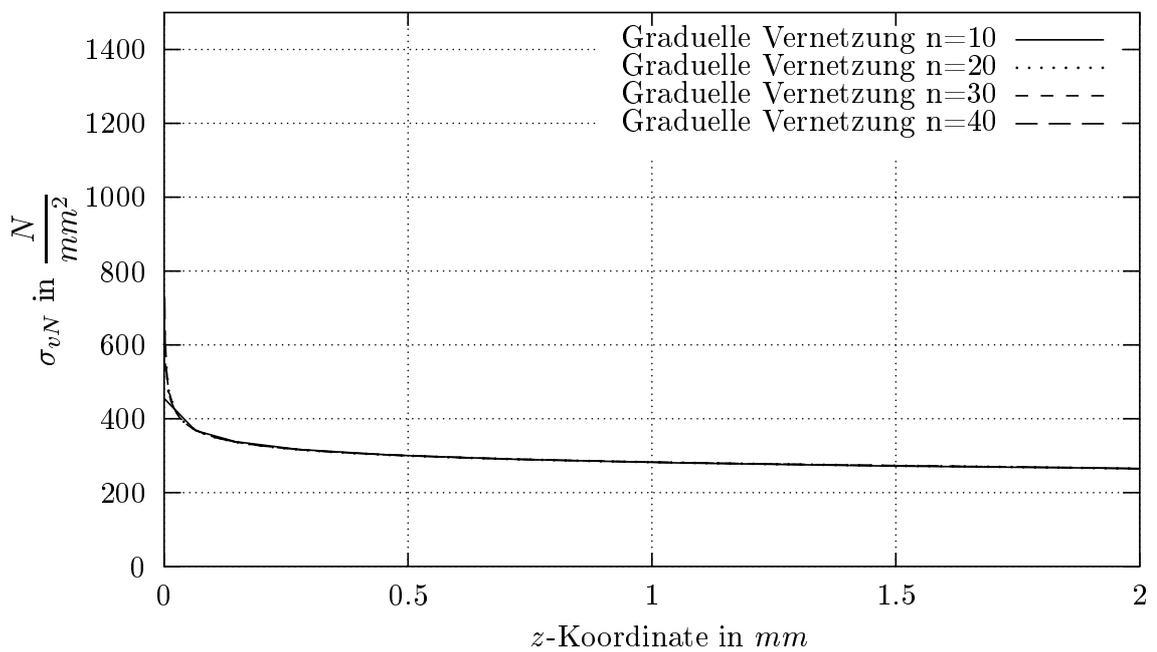


Abb. A.20: Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für n=10,20,30,40 der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..2mm$ bei Nabenunterstand

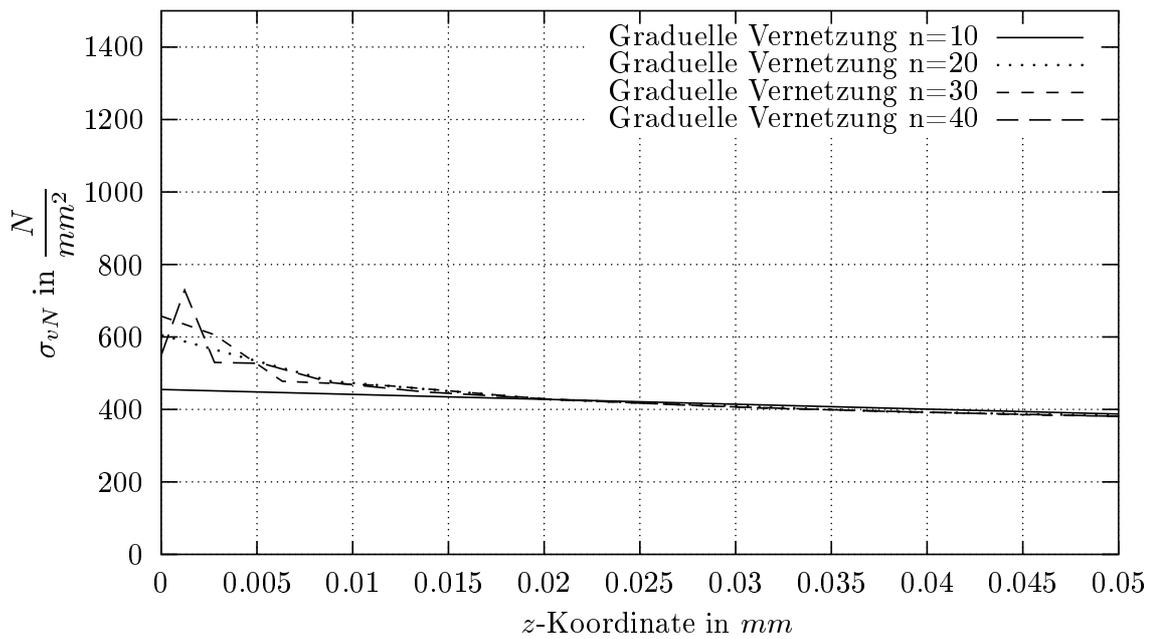


Abb. A.21: Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für $n=10,20,30,40$ der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..0.5\text{mm}$ bei Nabenunterstand

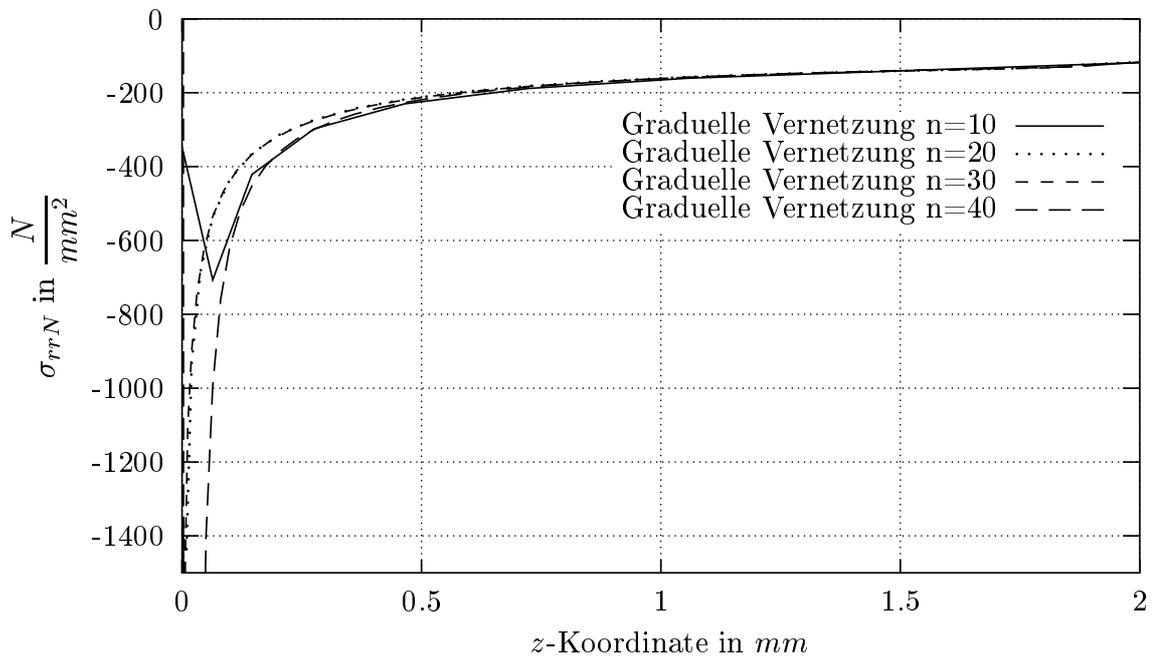


Abb. A.22: Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für $n=10,20,30,40$ der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..2\text{mm}$ bei Nabenüberstand

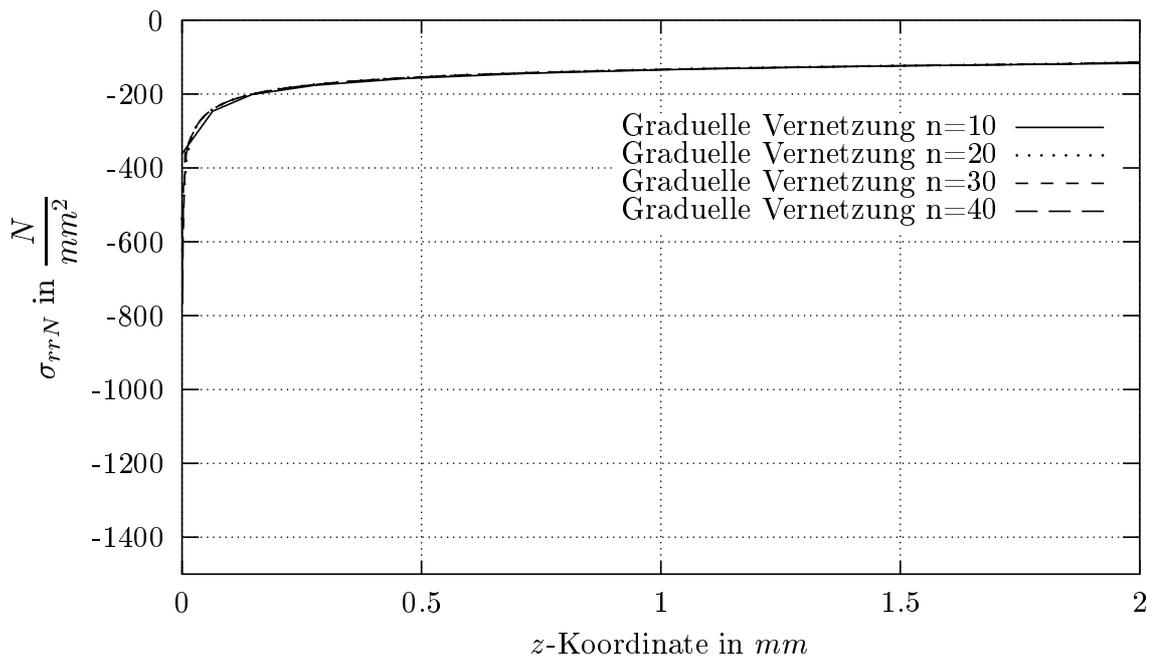


Abb. A.23: Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für $n=10,20,30,40$ der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..2mm$ bei Nabenunterstand

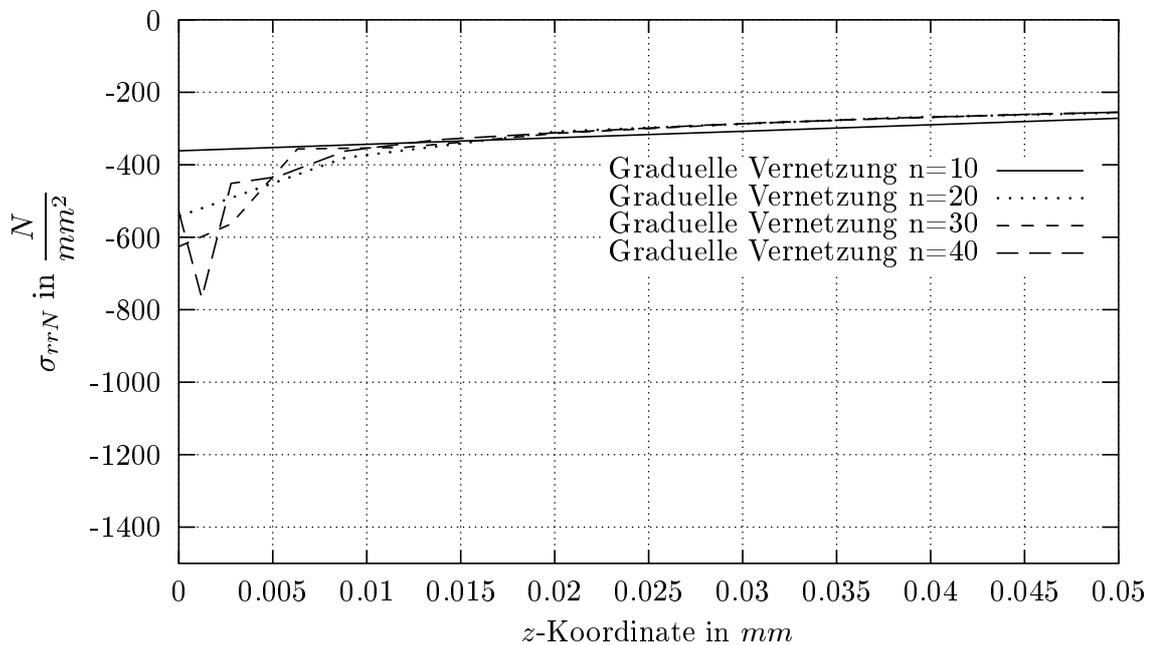


Abb. A.24: Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für $n=10,20,30,40$ der graduellen Vernetzung im Bereich $z = 0..0.5mm$ bei Nabenunterstand

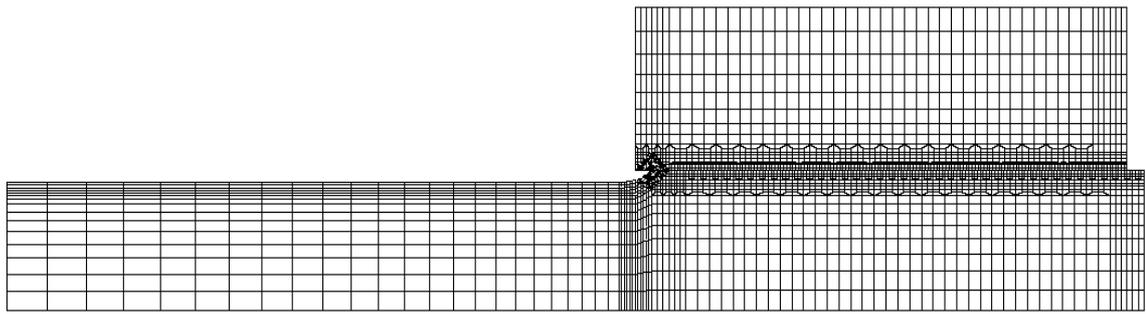


Abb. A.25: Modell 2D-grad-fein bei Nabenüberstand

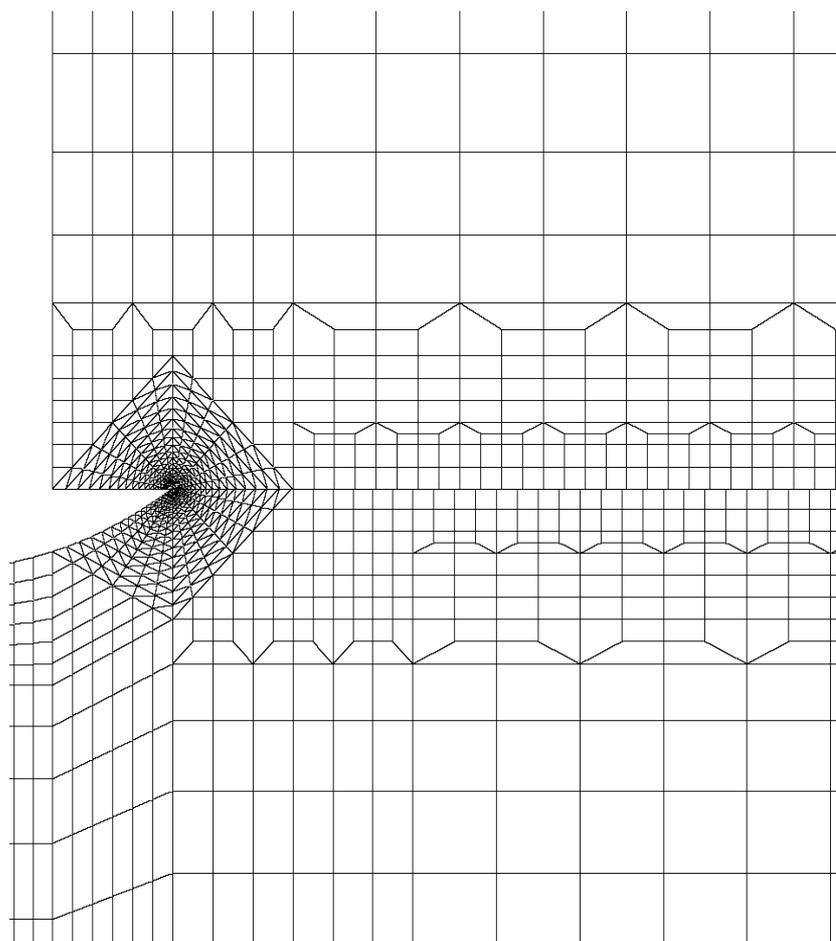


Abb. A.26: Modell 2D-grad-fein bei Nabenüberstand - Detail

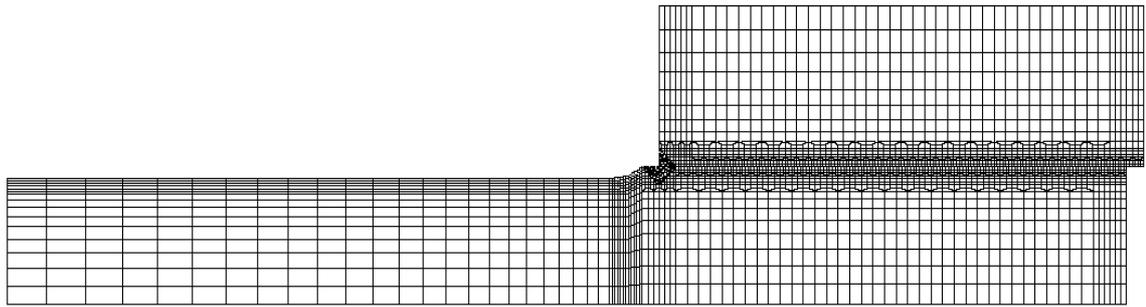


Abb. A.27: Modell 2D-grad-fein bei Nabenunterstand

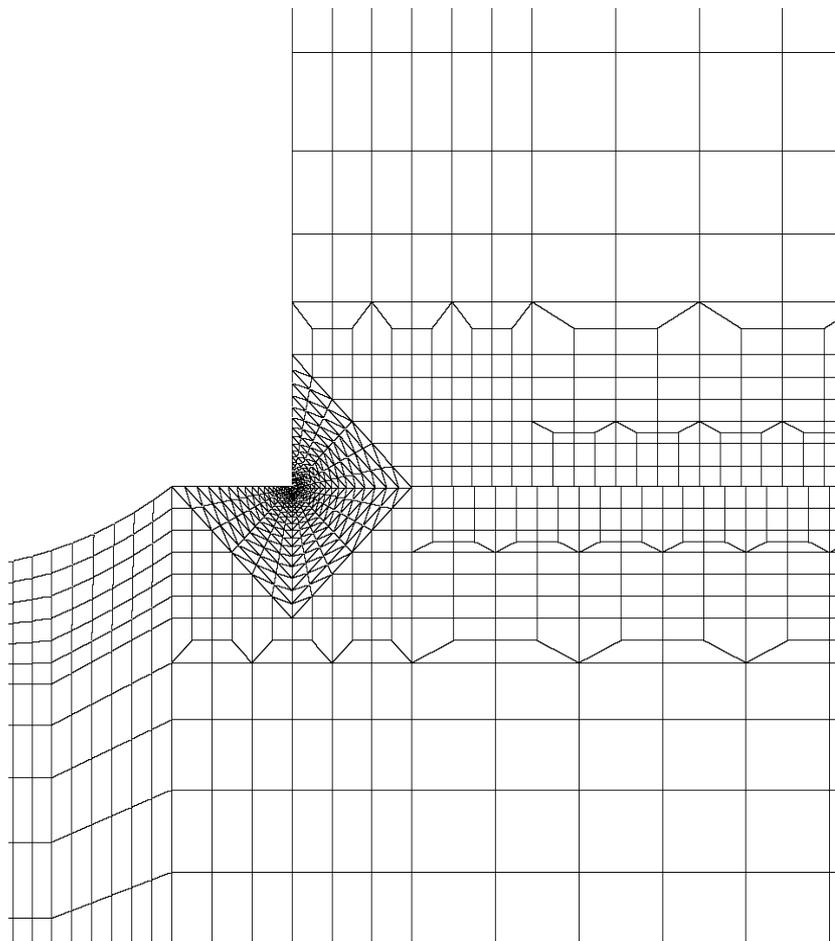


Abb. A.28: Modell 2D-grad-fein bei Nabenunterstand - Detail

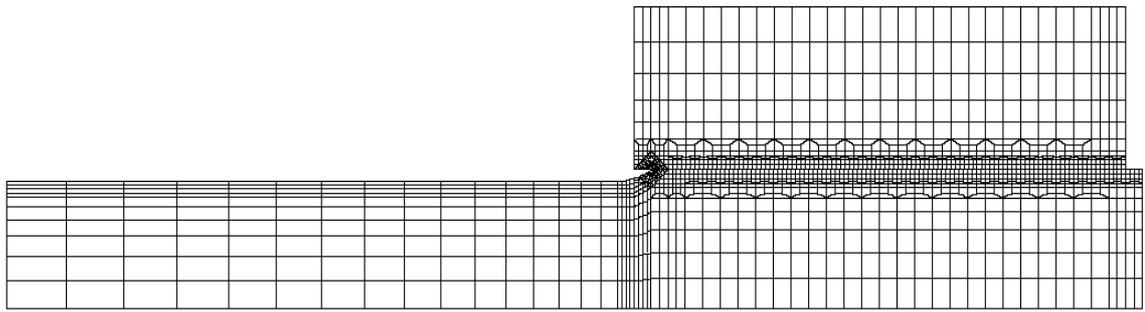


Abb. A.29: Modell 2D-grad-grob bei Nabenüberstand

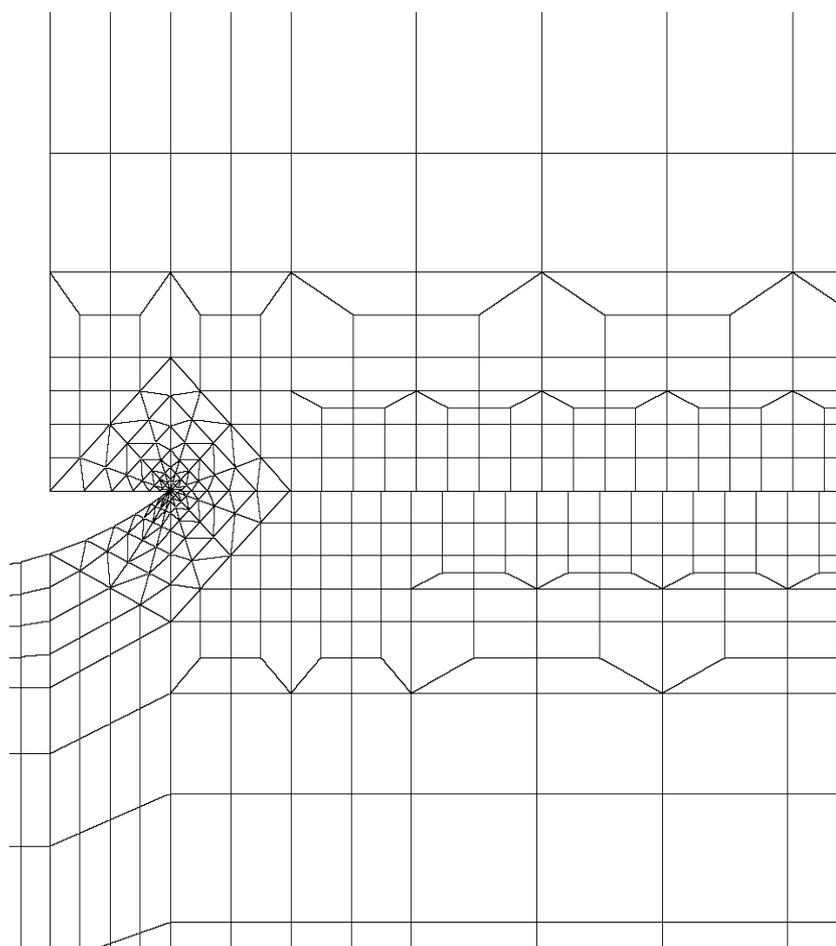


Abb. A.30: Modell 2D-grad-grob bei Nabenüberstand - Detail

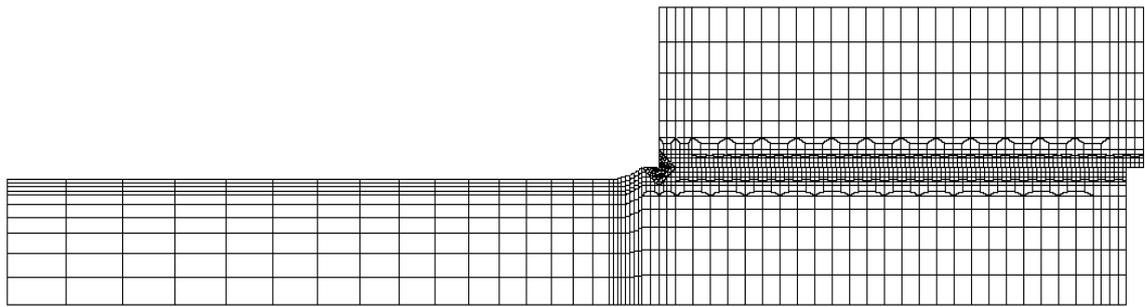


Abb. A.31: Modell 2D-grad-grob bei Nabenunterstand

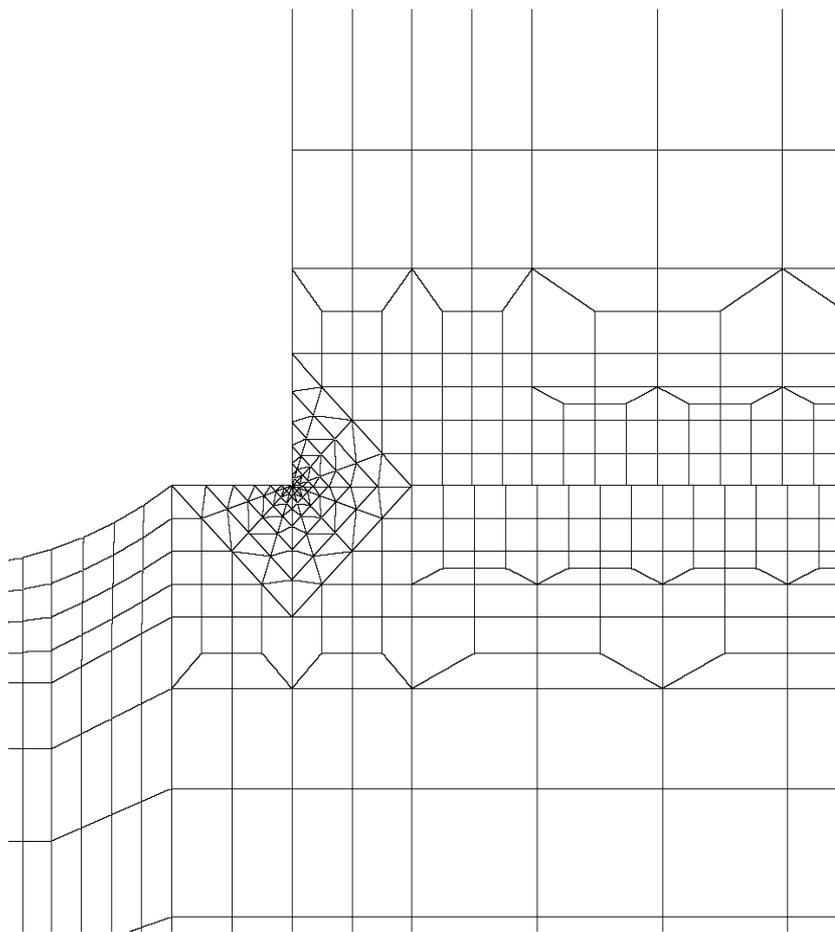


Abb. A.32: Modell 2D-grad-grob bei Nabenunterstand - Detail

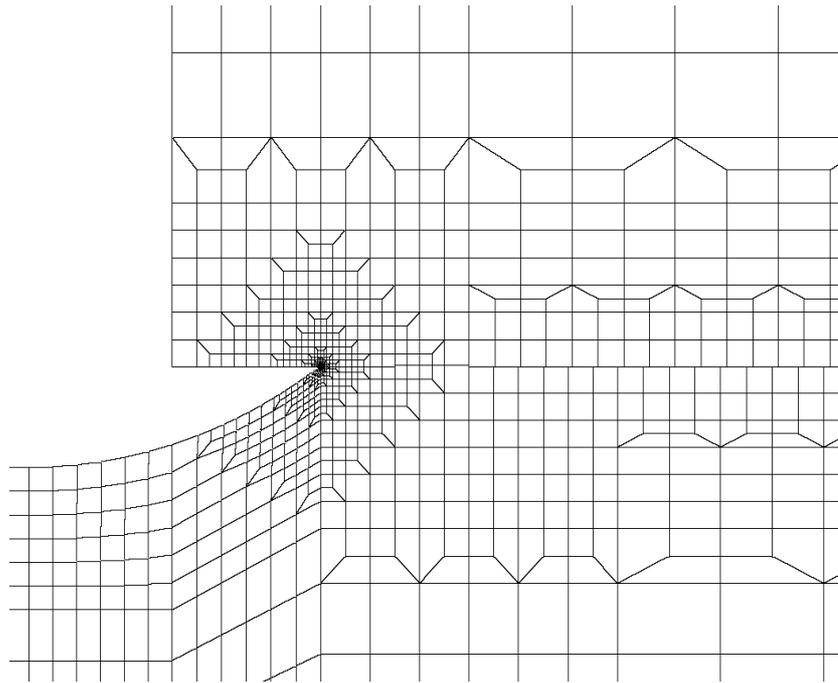


Abb. A.33: Modell 2D-quad-fein bei Nabenüberstand - Detail

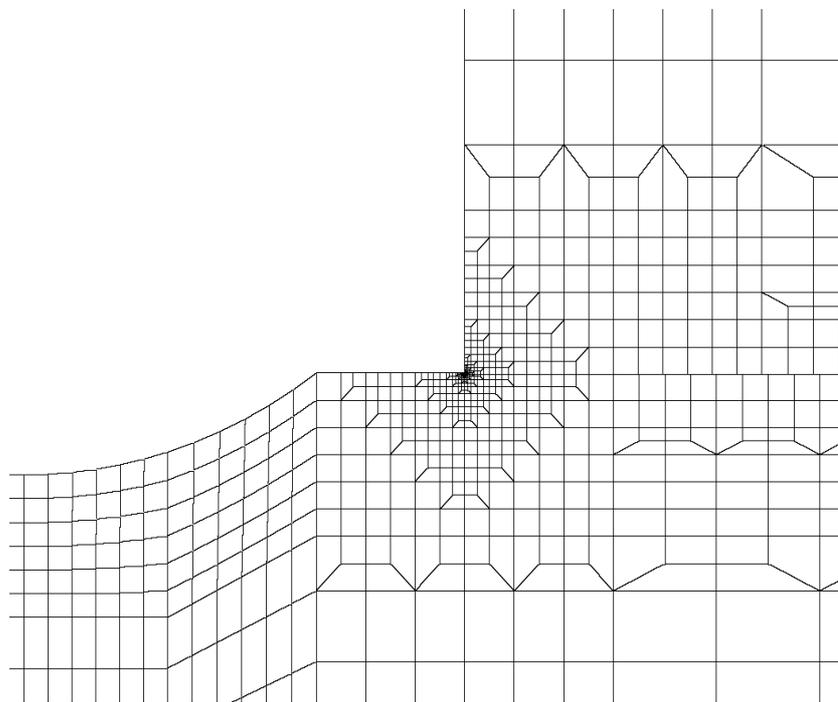


Abb. A.34: Modell 2D-quad-fein bei Nabenunterstand - Detail

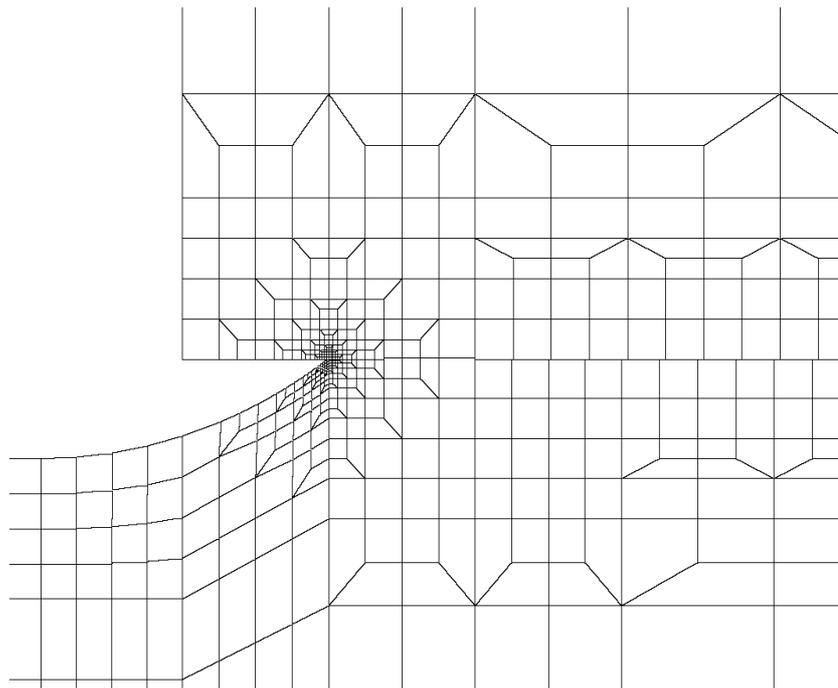


Abb. A.35: Modell 2D-quad-grob bei Nabenüberstand - Detail

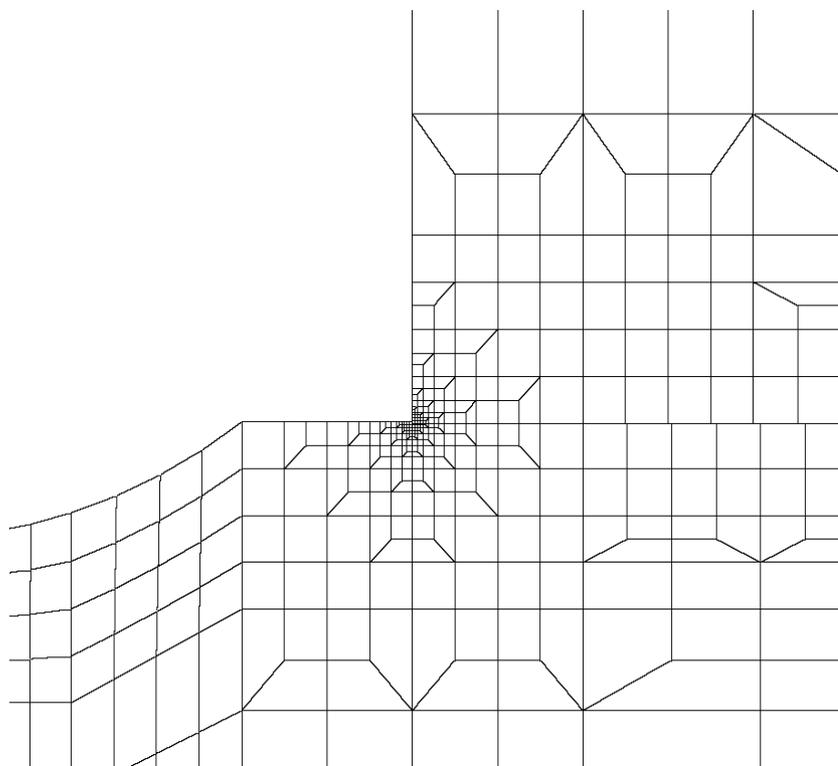


Abb. A.36: Modell 2D-quad-grob bei Nabenunterstand - Detail

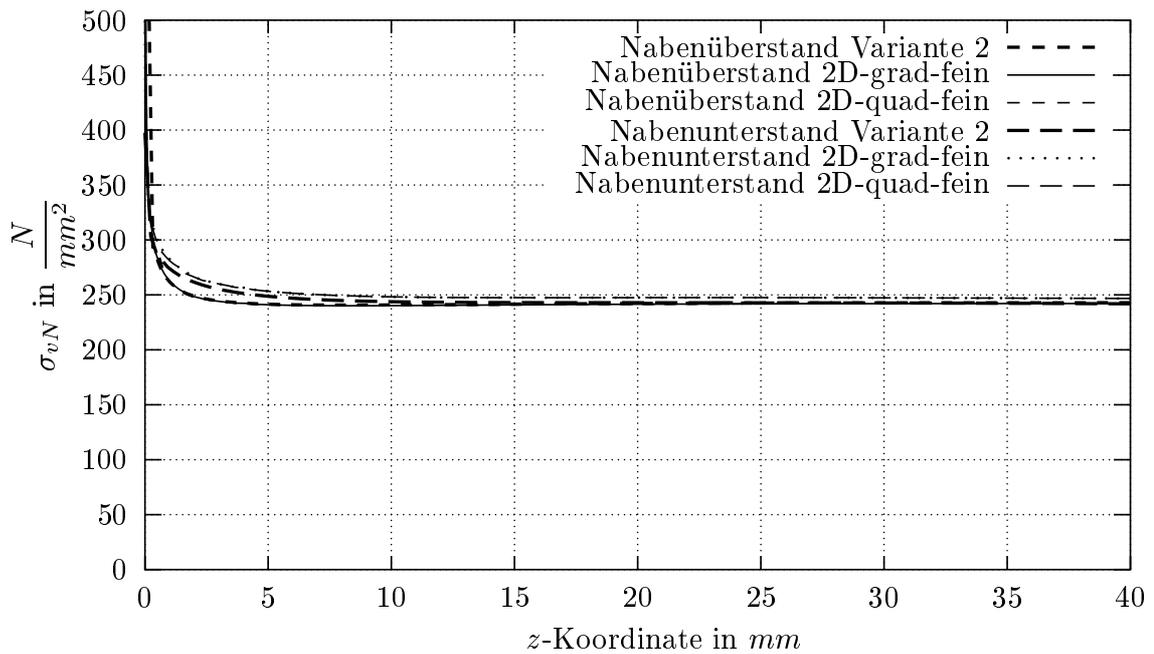


Abb. A.37: Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für Variante 2, 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..40mm$

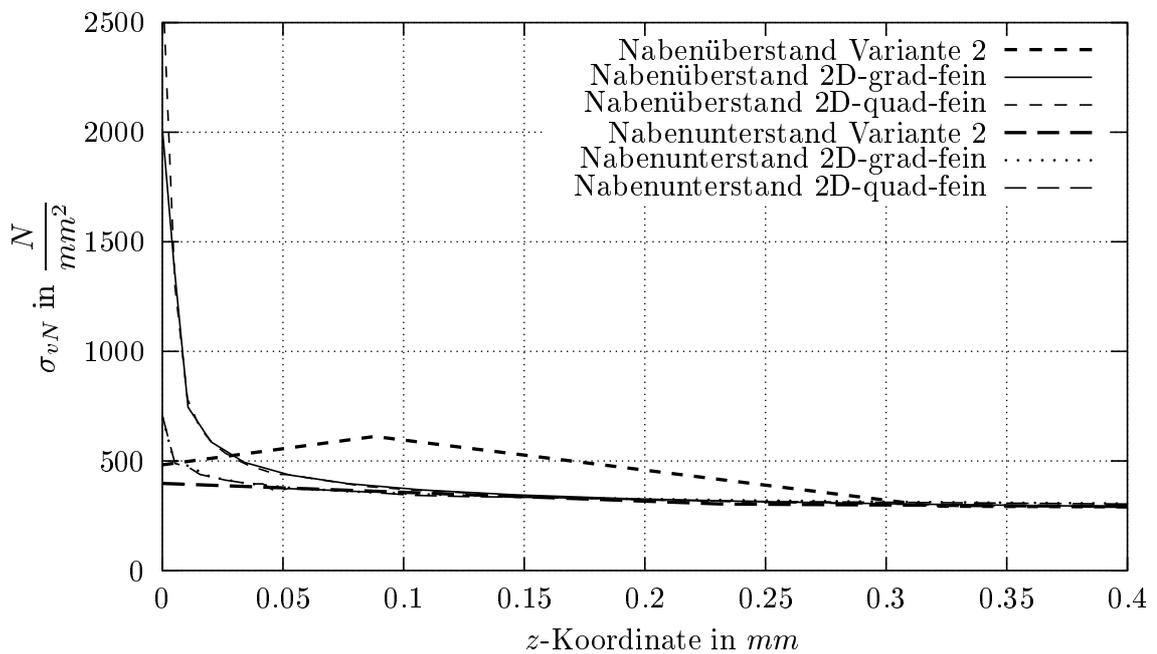


Abb. A.38: Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für Variante 2, 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..0.4mm$

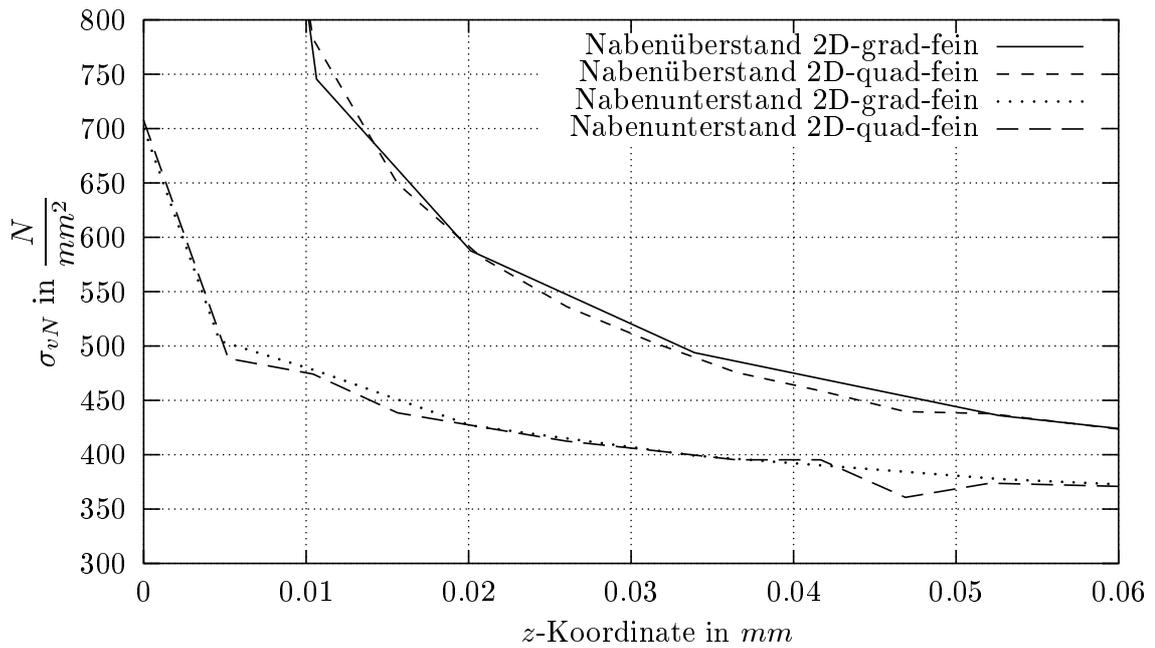


Abb. A.39: Vergleichsspannungen an der Nabeninnenseite für 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..0.06mm$

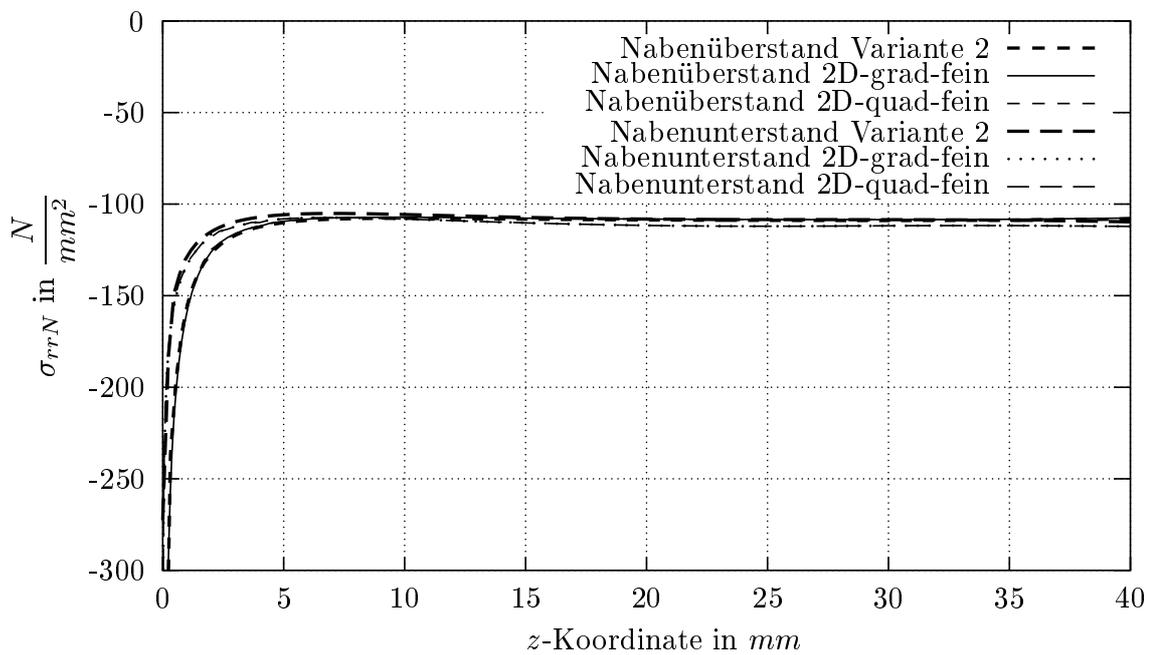


Abb. A.40: Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für Variante 2, 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..40mm$

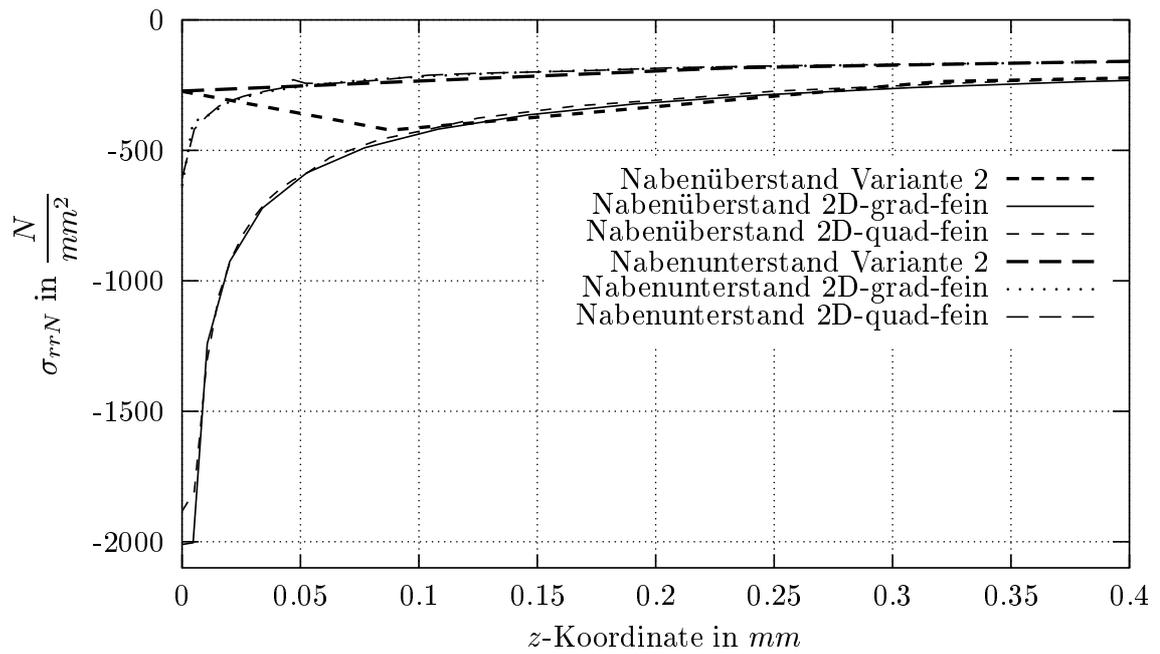


Abb. A.41: Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für Variante 2, 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..0.4mm$

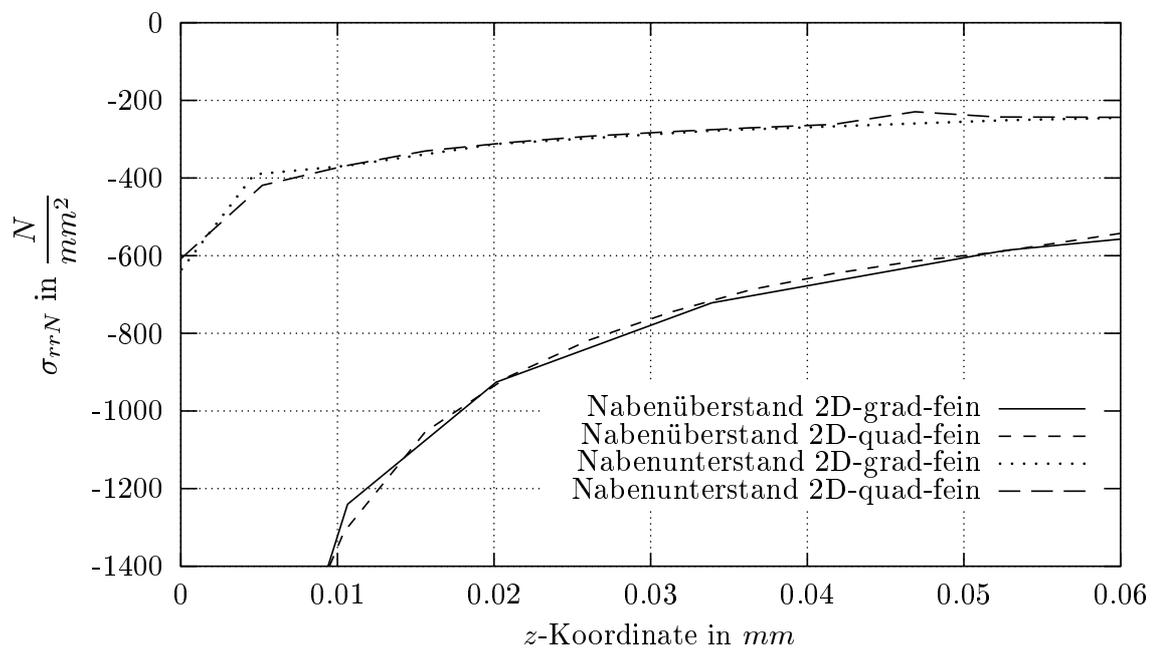


Abb. A.42: Kontaktnormalspannungen an der Nabeninnenseite für 2D-grad-fein und 2D-quad-fein im Bereich $z = 0..0.06mm$

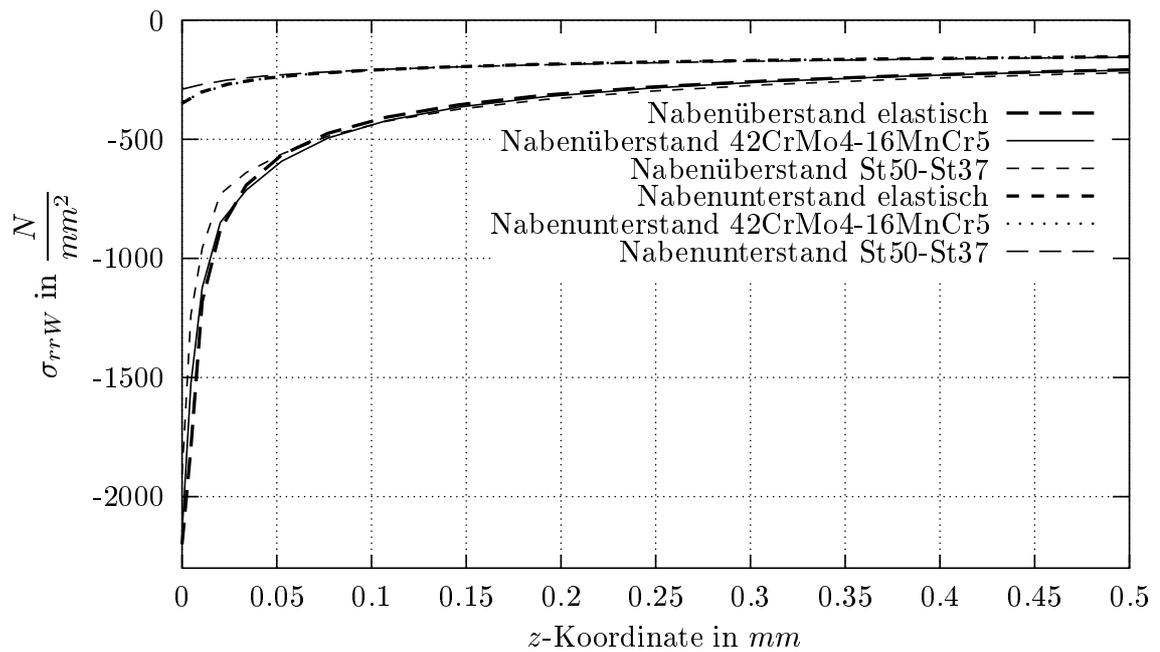


Abb. A.43: Kontaktnormalspannungen im Bereich $z = 0..0,5mm$ an der Wellenoberseite von 2D-grad-fein

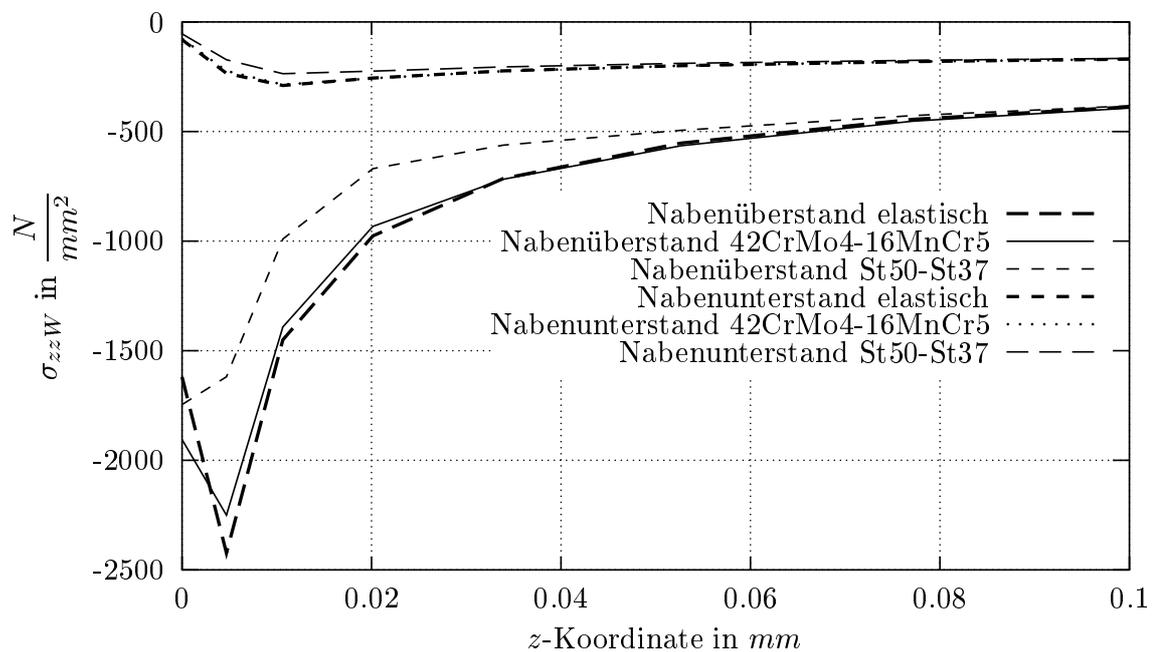


Abb. A.44: Axialspannungen im Bereich $z = 0..1mm$ an der Wellenoberseite von 2D-grad-fein

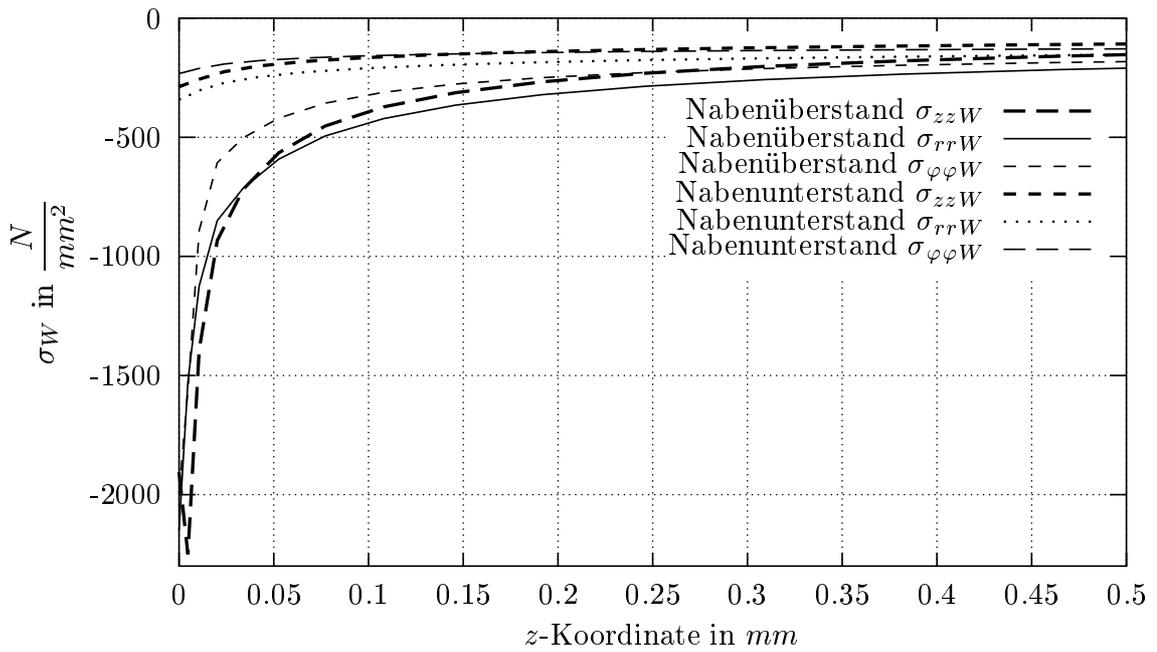


Abb. A.45: Spannungen im Bereich $z = 0..0,5mm$ an der Wellenoberseite von 2D-grad-fein für die Werkstoffpaarung 42CrMo4-16MnCr5

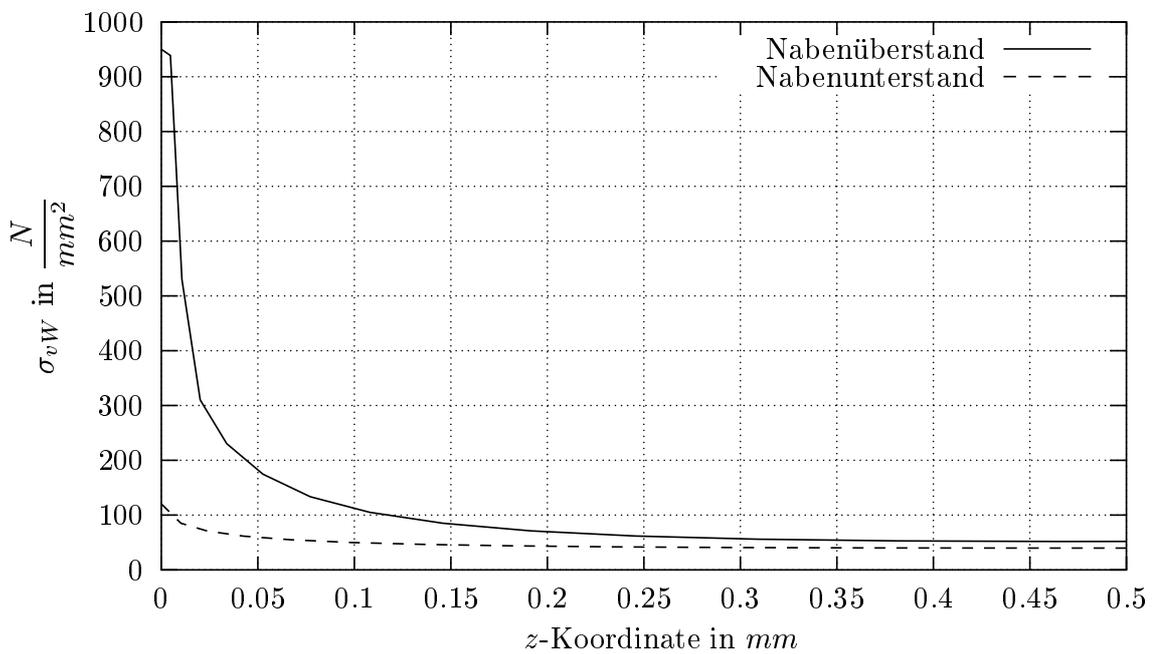


Abb. A.46: Vergleichsspannungen im Bereich $z = 0..0,5mm$ an der Wellenoberseite von 2D-grad-fein für die Werkstoffpaarung 42CrMo4-16MnCr5

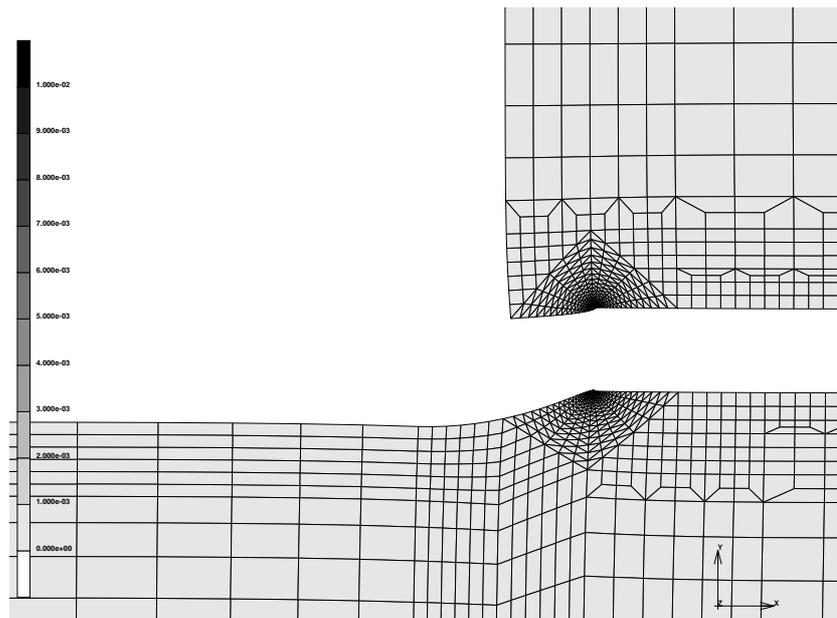


Abb. A.47: Übererhöhte Darstellung der elastisch-plastischen Verformung und ε_{eq}^{pl} von 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenüberstand

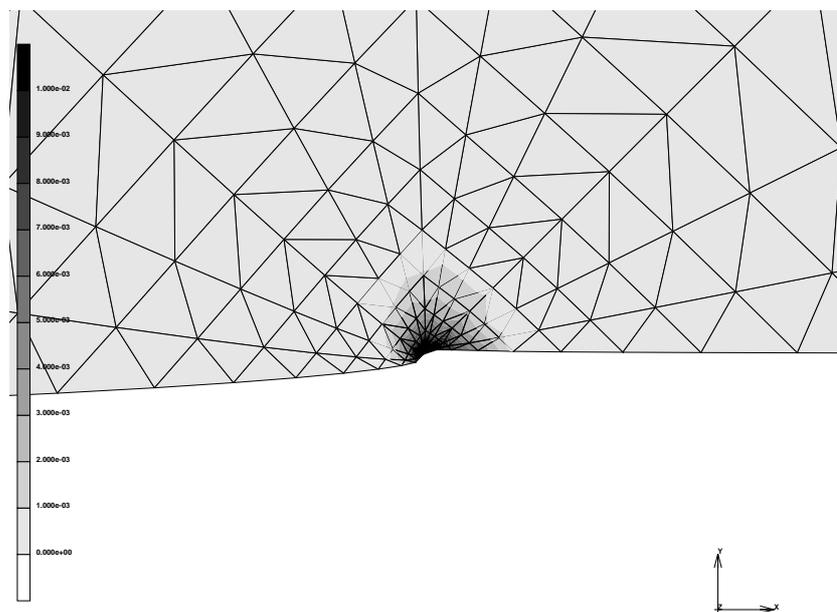


Abb. A.48: Überhöhte Darstellung der elastisch-plastischen Verformung und ε_{eq}^{pl} für die Nabe von 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenüberstand - Detail

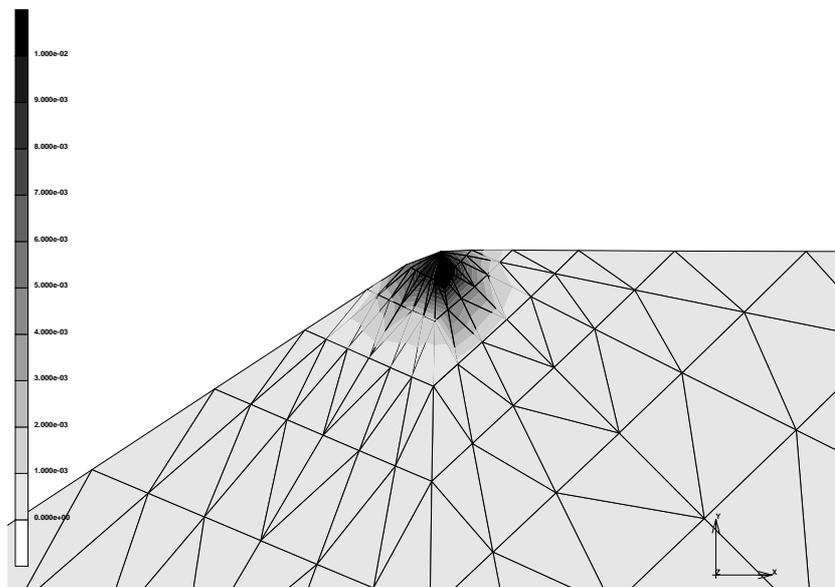


Abb. A.49: Überhöhte Darstellung der elastisch-plastischen Verformung und ε_{eq}^{pl} für die Welle von 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenüberstand - Detail

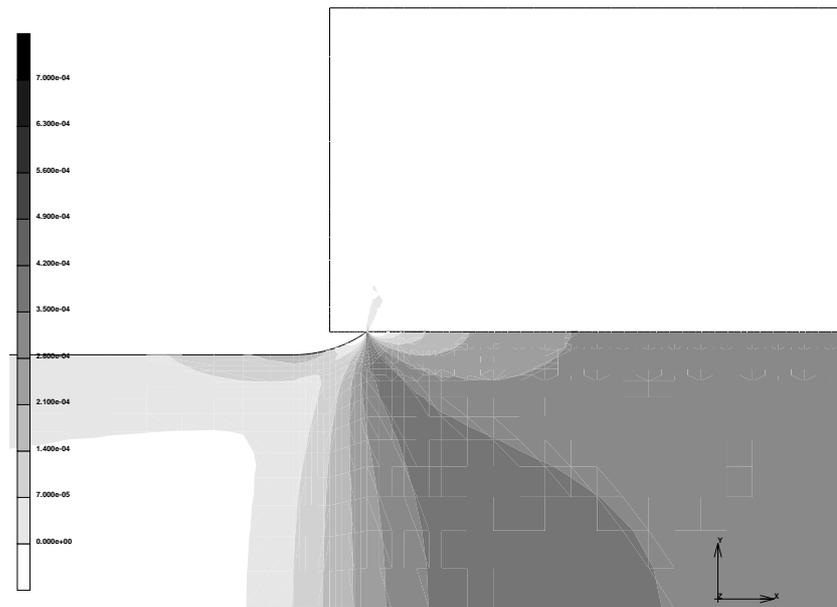


Abb. A.50: Elastische Dehnung in axialer Richtung ε_{zz}^{el} in 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenüberstand

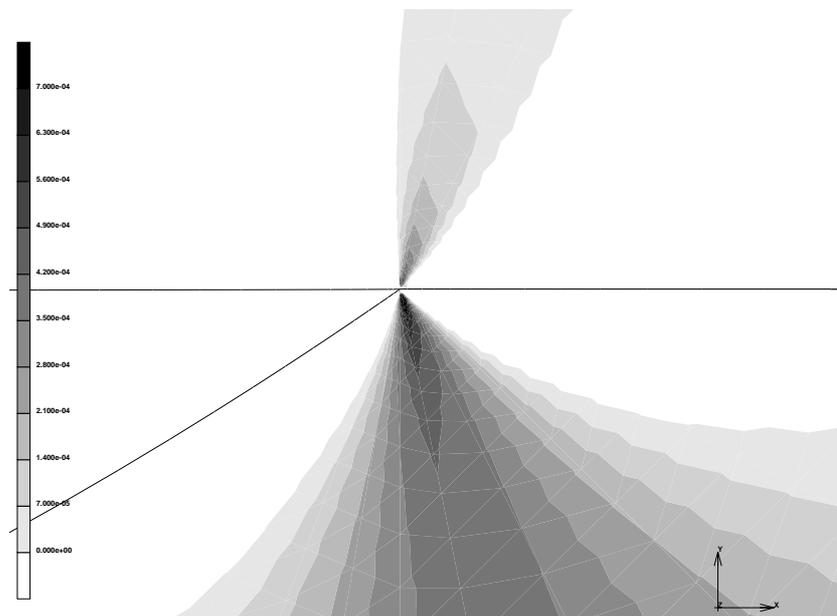


Abb. A.51: Elastische Dehnung in axialer Richtung ε_{zz}^{el} in 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenüberstand - Detail

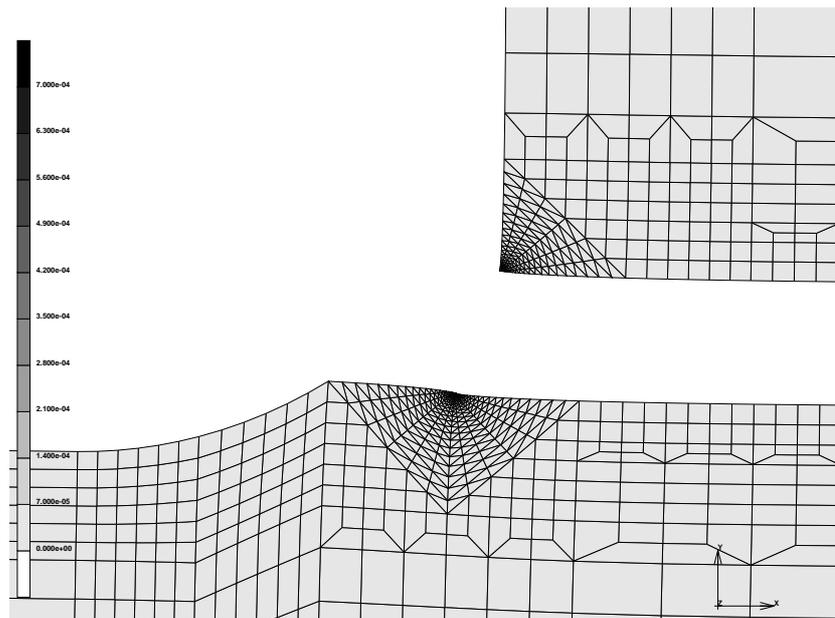


Abb. A.52: Überhöhte Darstellung der elastisch-plastischen Verformung und ε_{eq}^{pl} von 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenunterstand

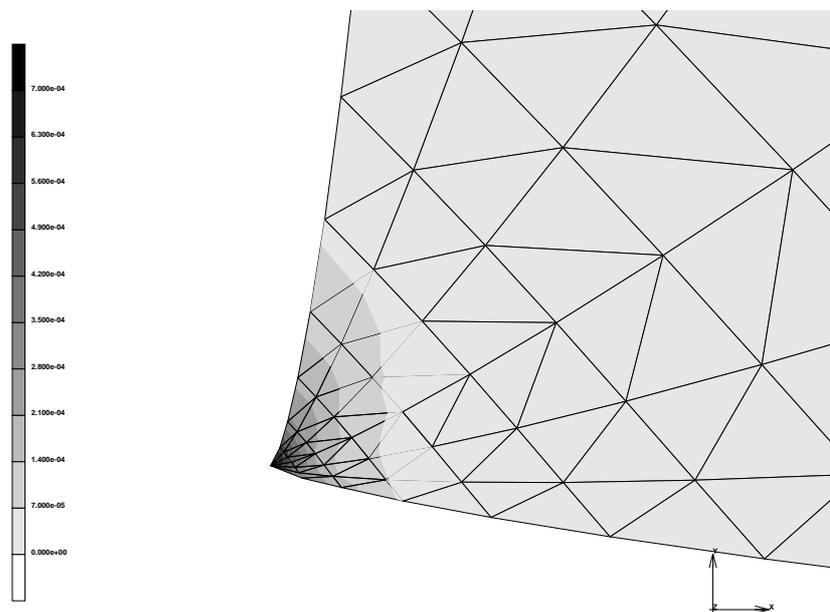


Abb. A.53: Überhöhte Darstellung der elastisch-plastischen Verformung und ε_{eq}^{pl} für die Nabe von 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenunterstand - Detail

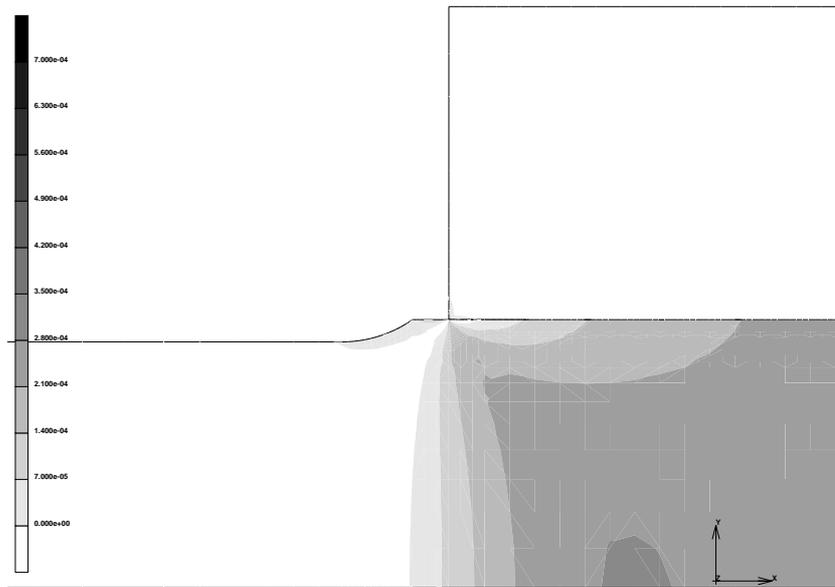


Abb. A.54: Elastische Dehnung in axialer Richtung ε_{zz}^{el} in 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenunterstand

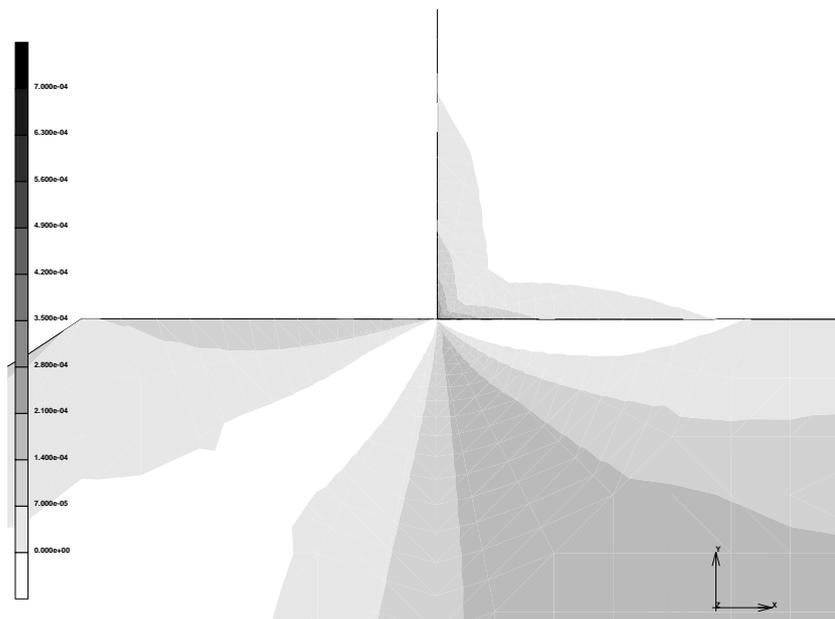


Abb. A.55: Elastische Dehnung in axialer Richtung ε_{zz}^{el} in 2D-grad-fein nach dem Fügen bei Nabenunterstand - Detail

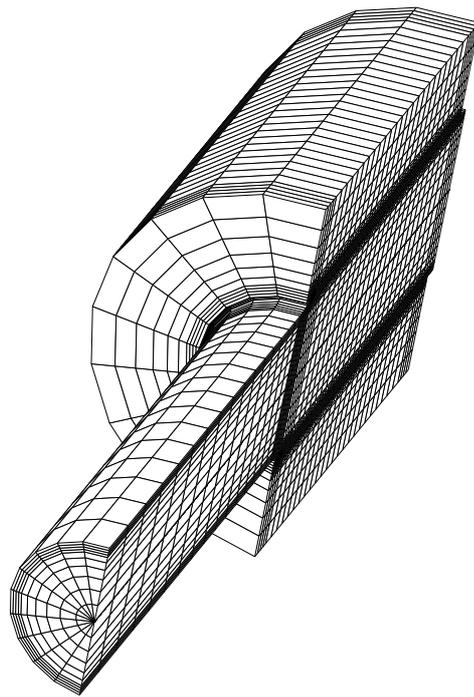


Abb. A.56: Modell 3D-quad bei Nabenüberstand

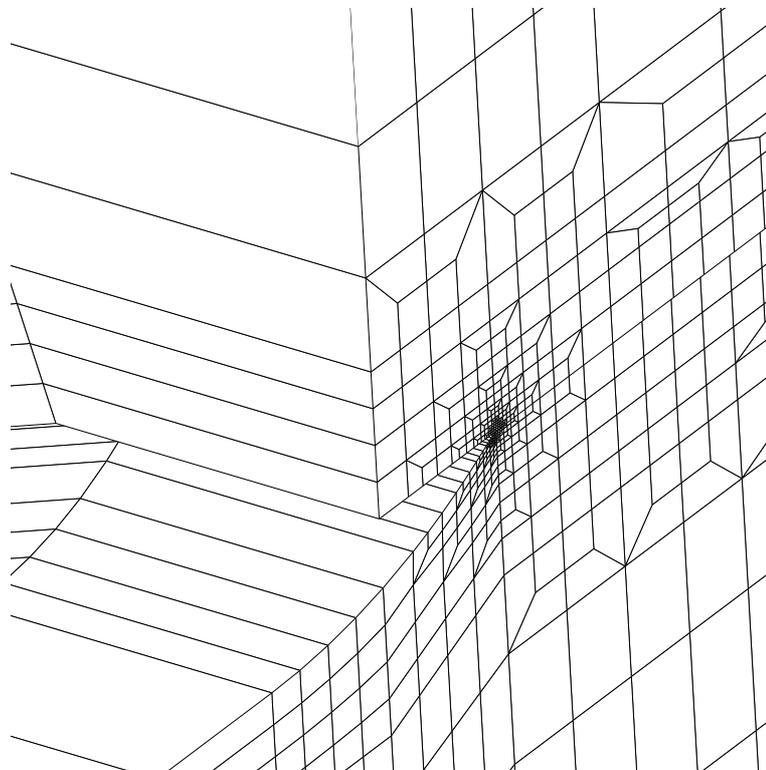


Abb. A.57: Modell 3D-quad bei Nabenüberstand - Detail

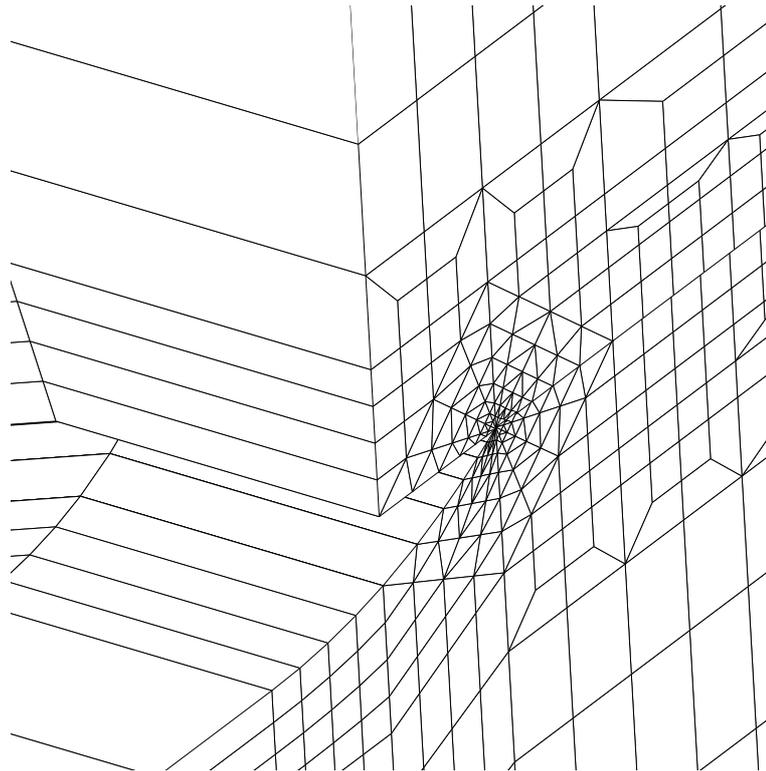


Abb. A.58: Modell 3D-grad bei Nabenüberstand - Detail

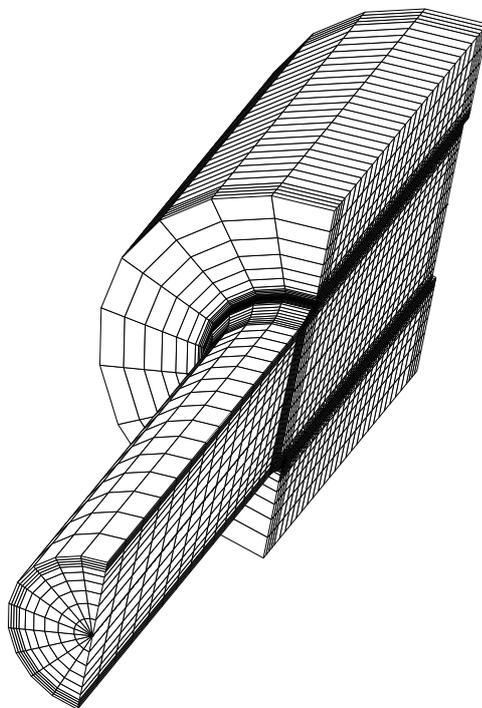


Abb. A.59: Modell 3D-quad bei Nabenunterstand

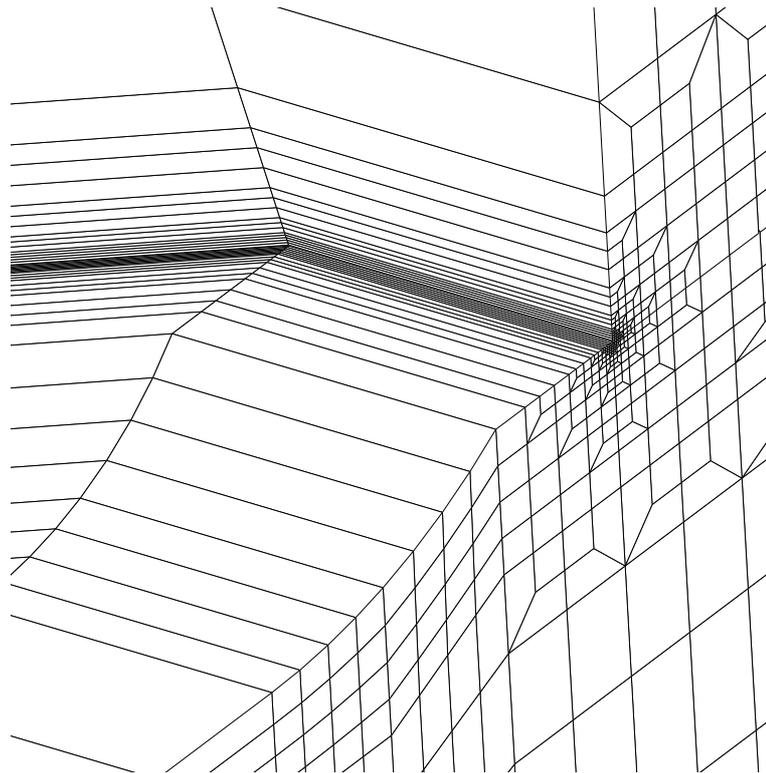


Abb. A.60: Modell 3D-quad bei Nabenunterstand - Detail

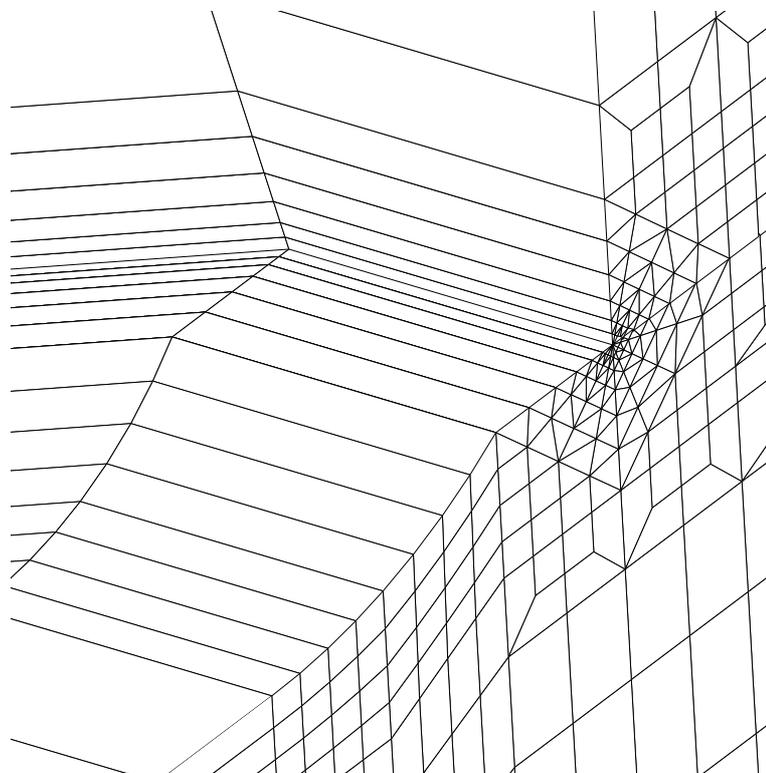


Abb. A.61: Modell 3D-grad bei Nabenunterstand - Detail

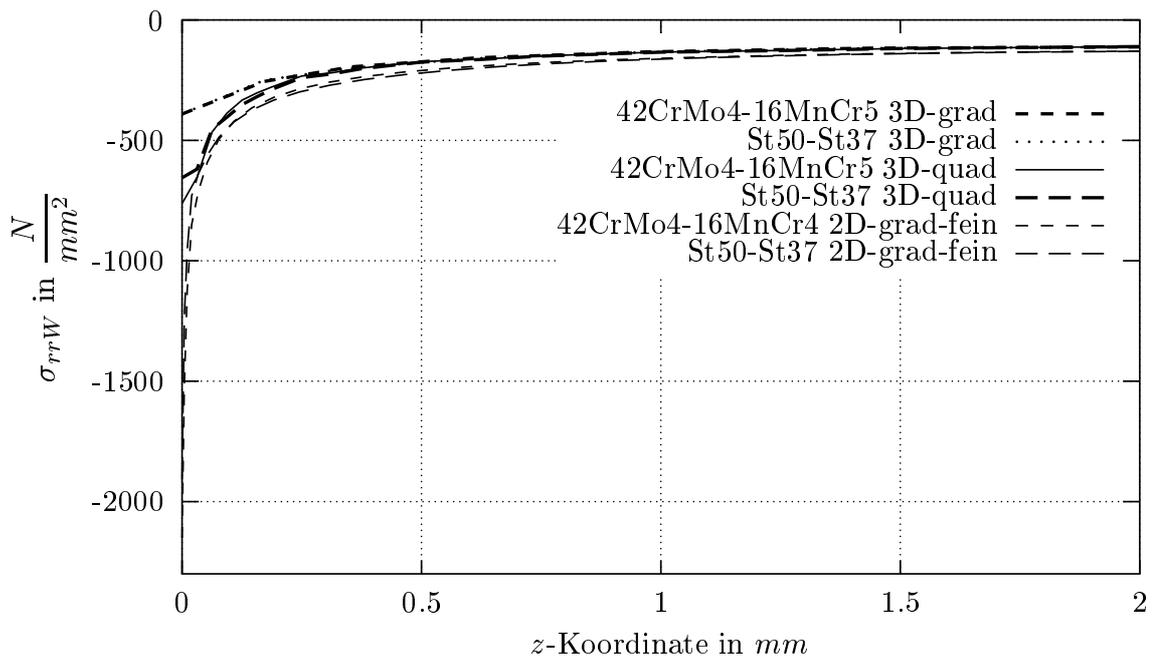


Abb. A.62: Vergleich der Kontaktnormalspannungen von 3D-grad, 3D-quad und 2D-grad-fein im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenüberstand

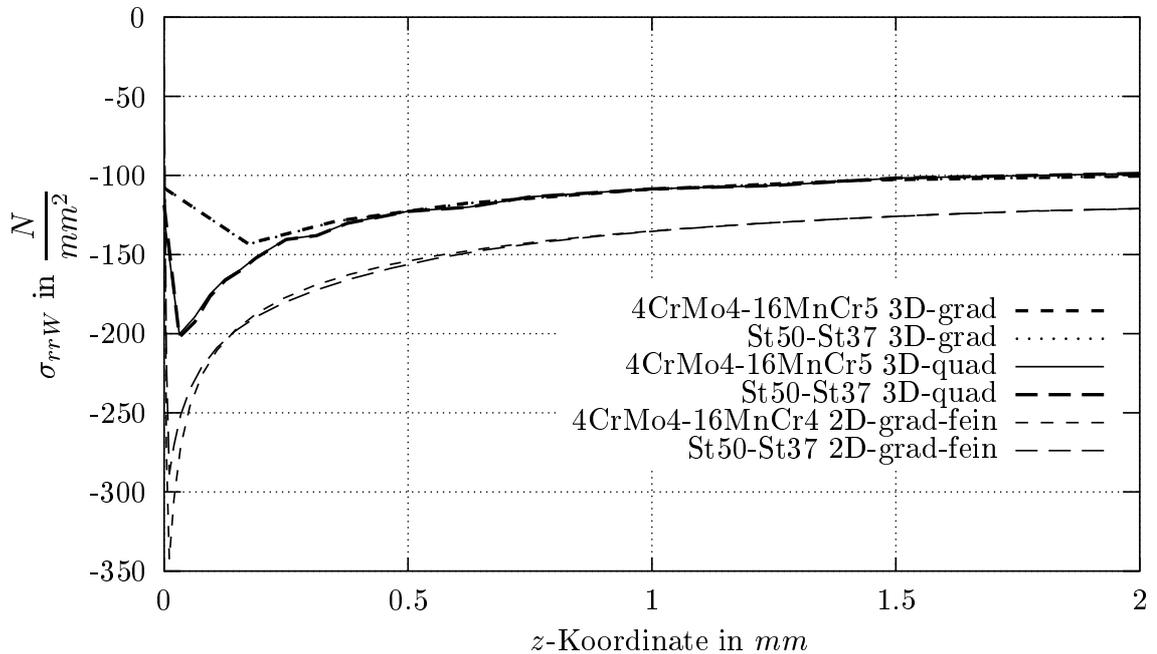


Abb. A.63: Vergleich der Kontaktnormalspannungen von 3D-grad, 3D-quad und 2D-grad-fein im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenunterstand

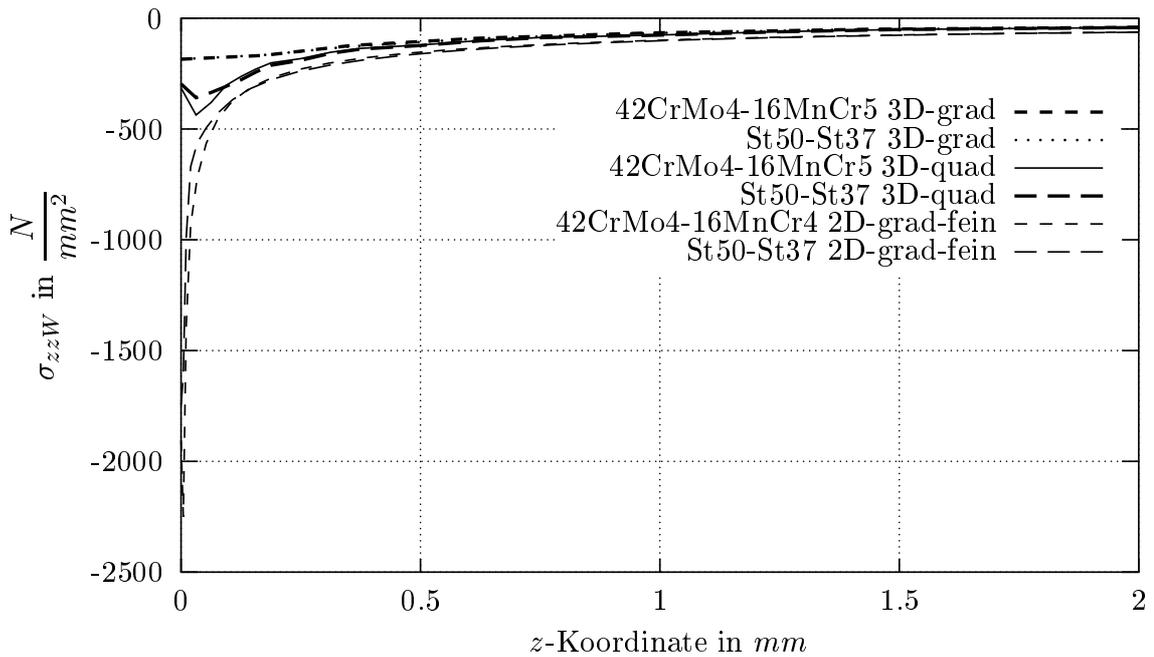


Abb. A.64: Vergleich der Axialspannungen von 3D-grad, 3D-quad und 2D-grad-fein im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenüberstand

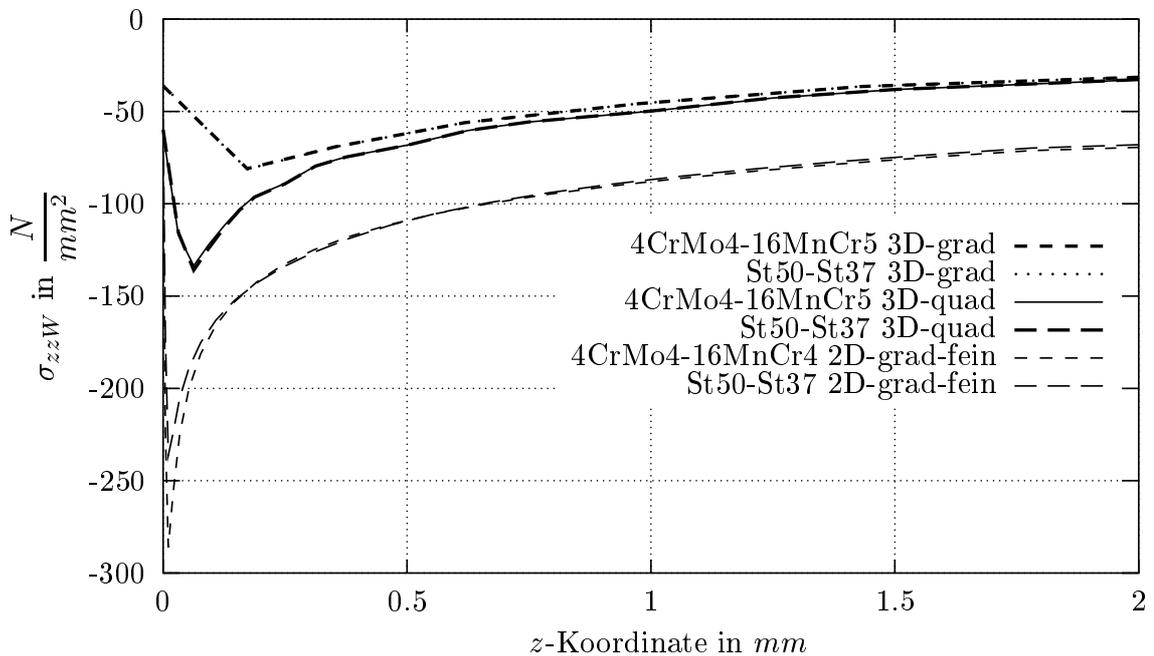


Abb. A.65: Vergleich der Axialspannungen von 3D-grad, 3D-quad und 2D-grad-fein im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenunterstand

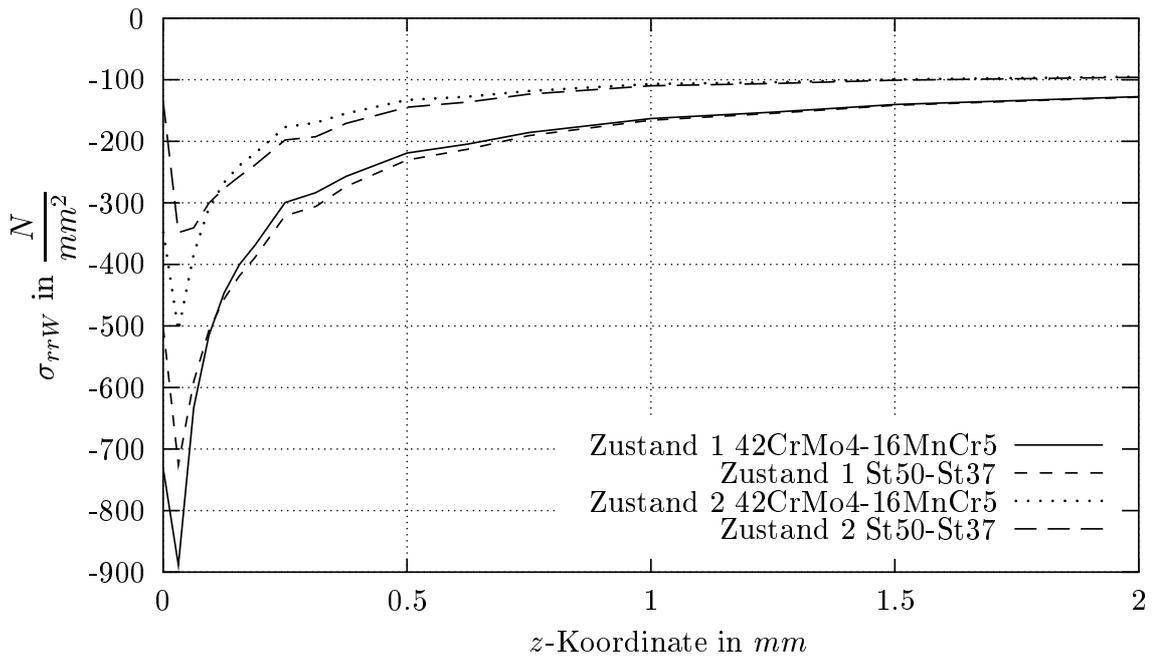


Abb. A.66: Radialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenüberstand

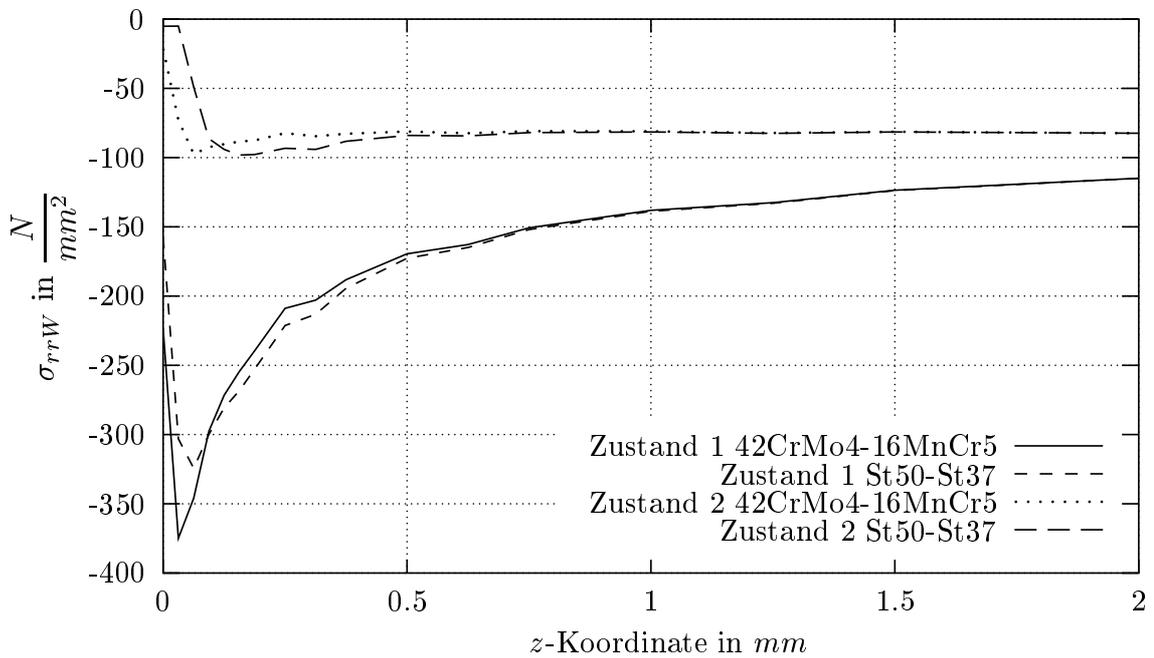


Abb. A.67: Radialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0..2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenunterstand

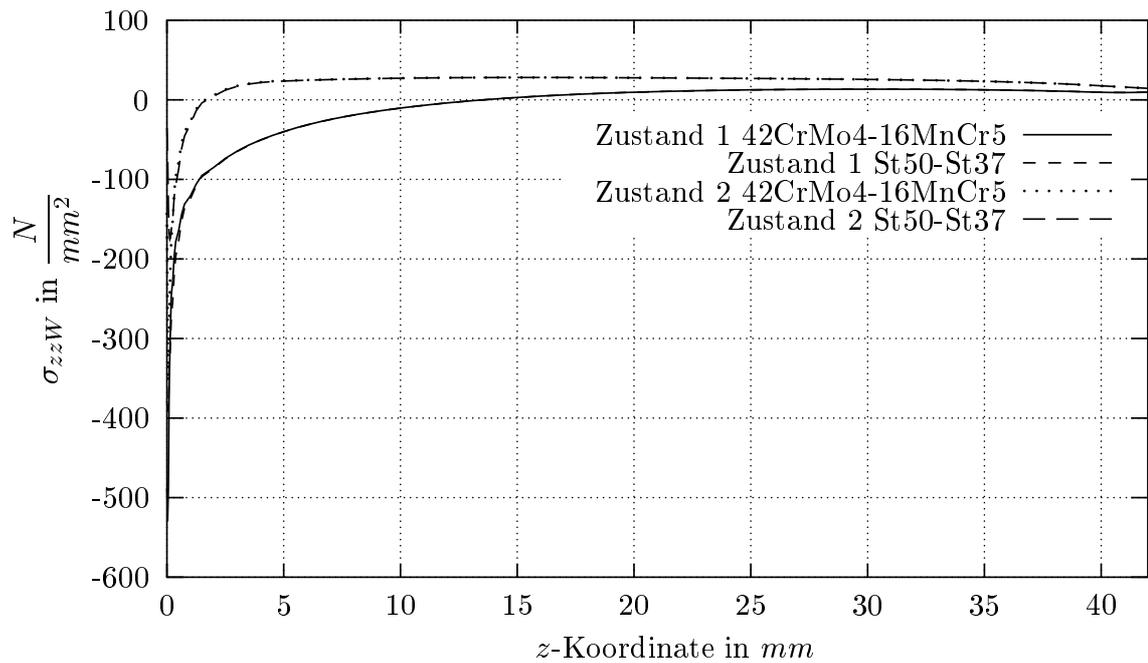


Abb. A.68: Axialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0.42mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenüberstand

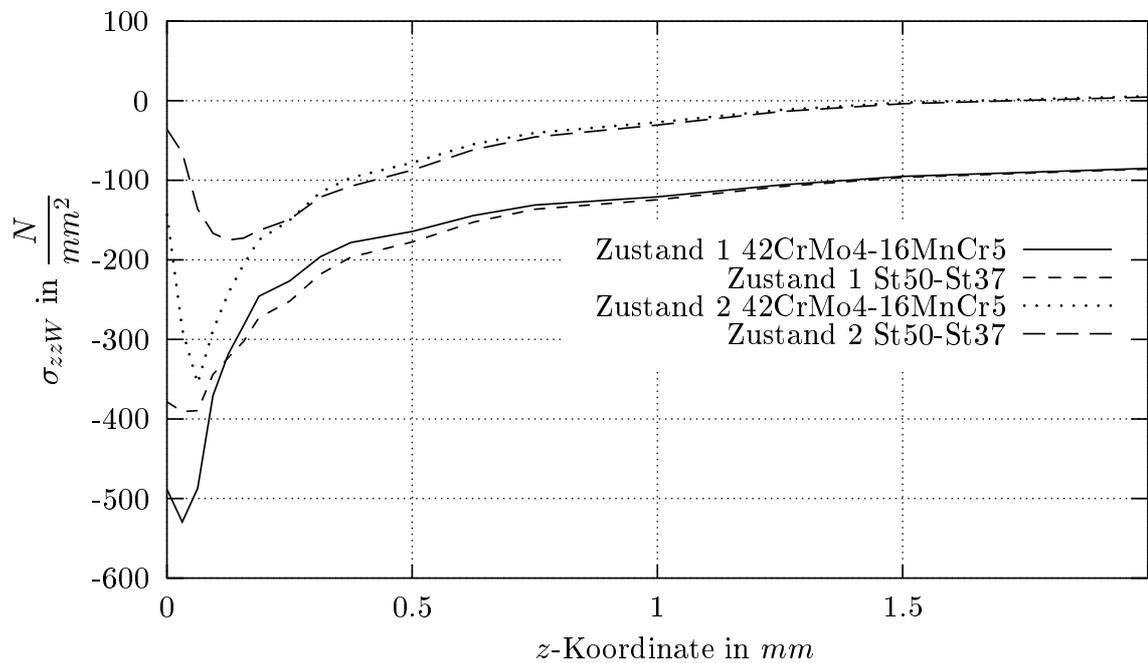


Abb. A.69: Axialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0.2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenüberstand

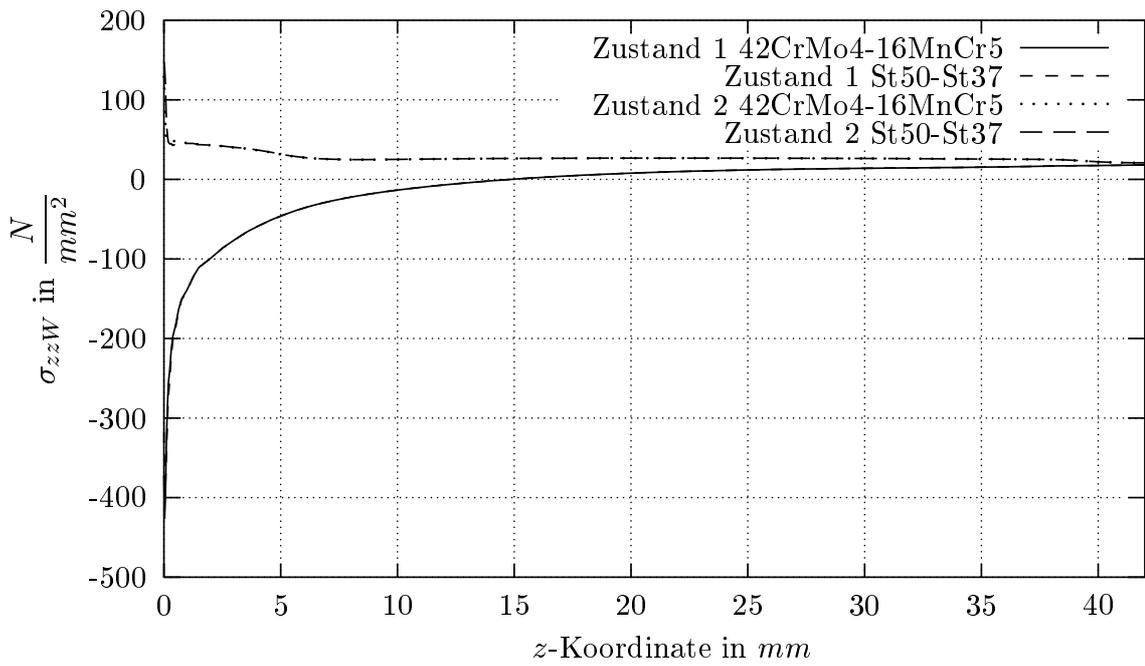


Abb. A.70: Axialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0.42mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenunterstand

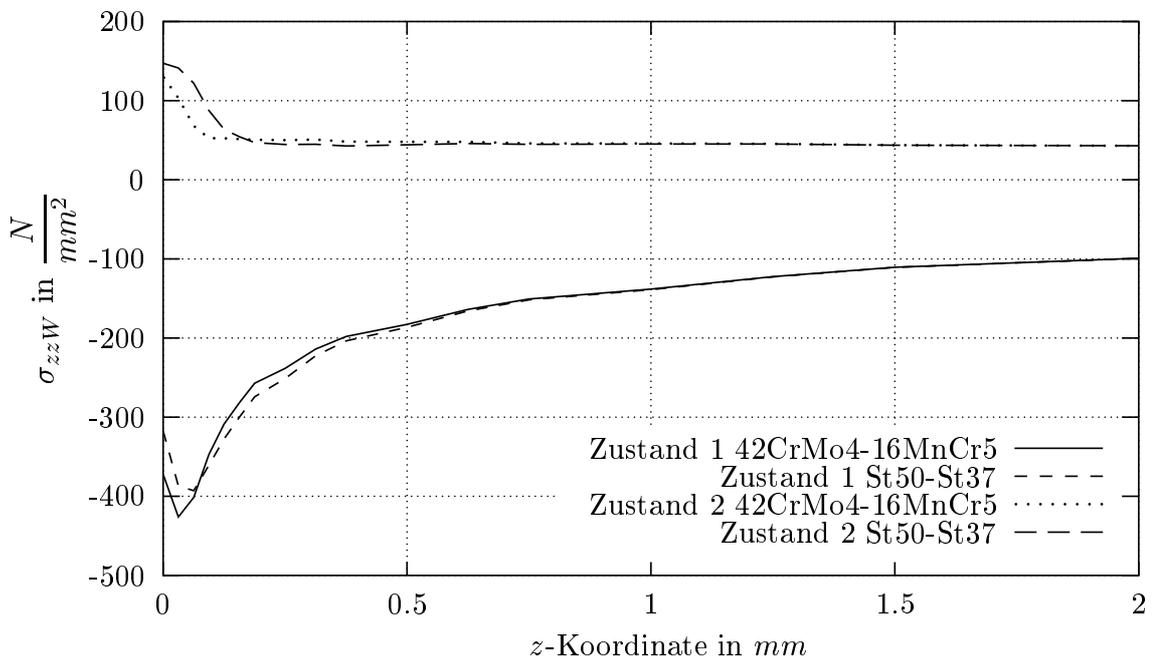


Abb. A.71: Axialspannungen im Modell 3D-quad für Zustand 1 und 2 im Bereich $z = 0.2mm$ an der Wellenoberseite bei Nabenunterstand

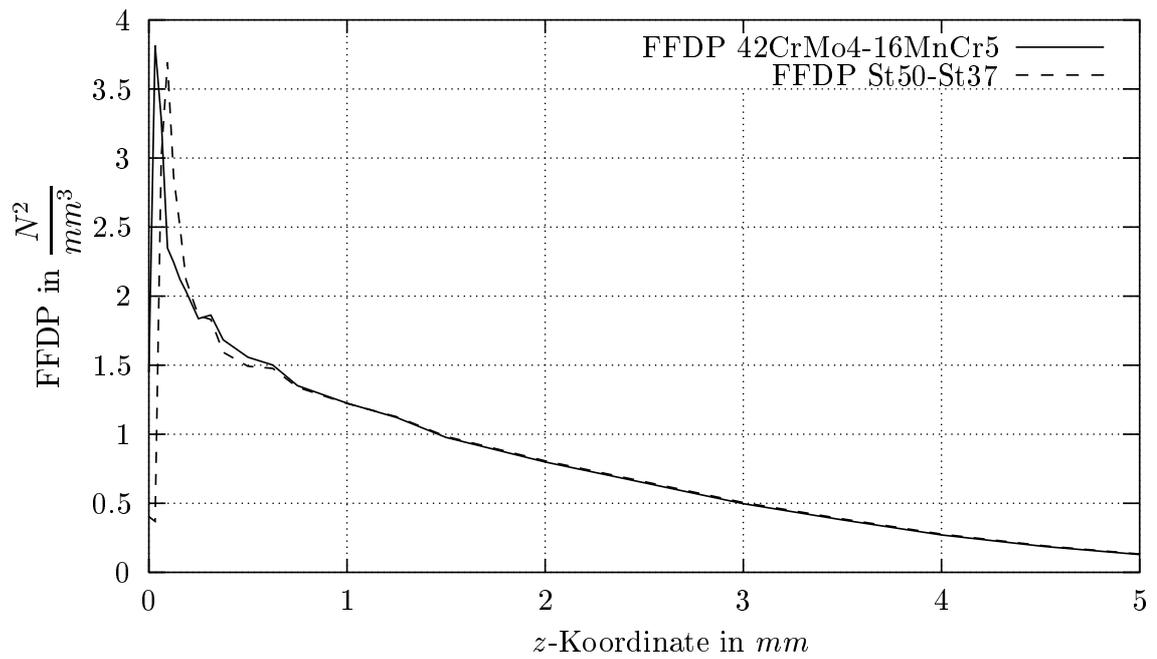


Abb. A.72: FFDP (Fretting/Fatigue Damage Parameter) auf der Wellenoberseite des Modelles 3D-quad für Zustand 2 im Bereich $z = 0..5mm$ bei Nabenunterstand

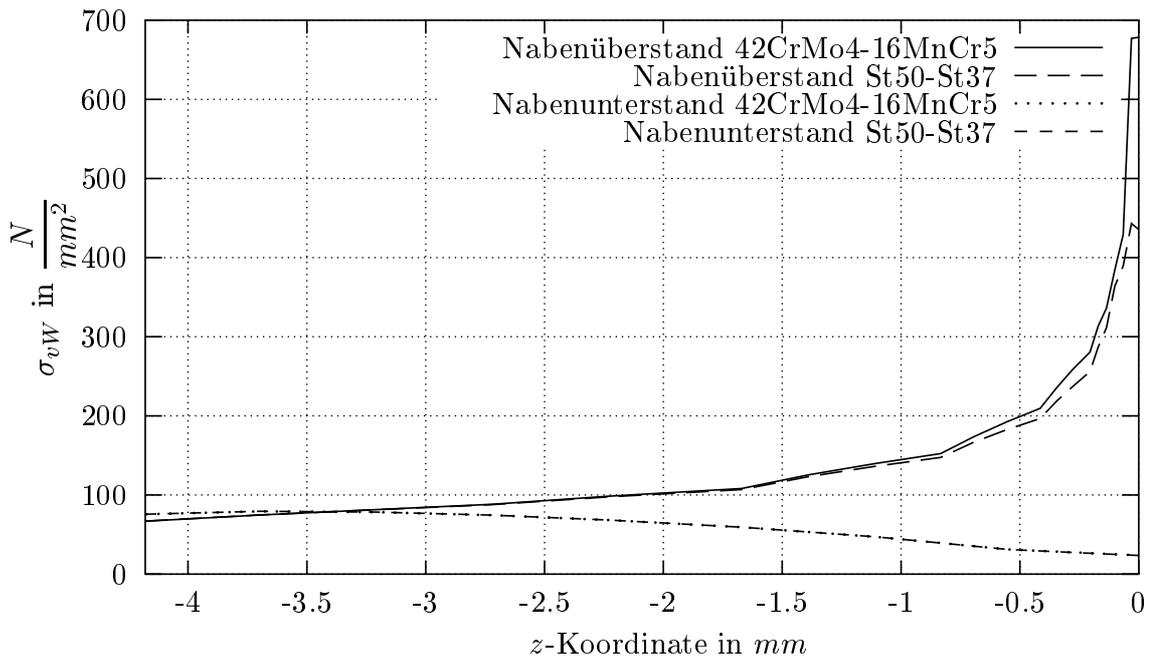


Abb. A.73: Vergleichsspannungen auf der Wellenoberseite des Modelles 3D-quad für Zustand 1 im Bereich des Wellenabsatzes

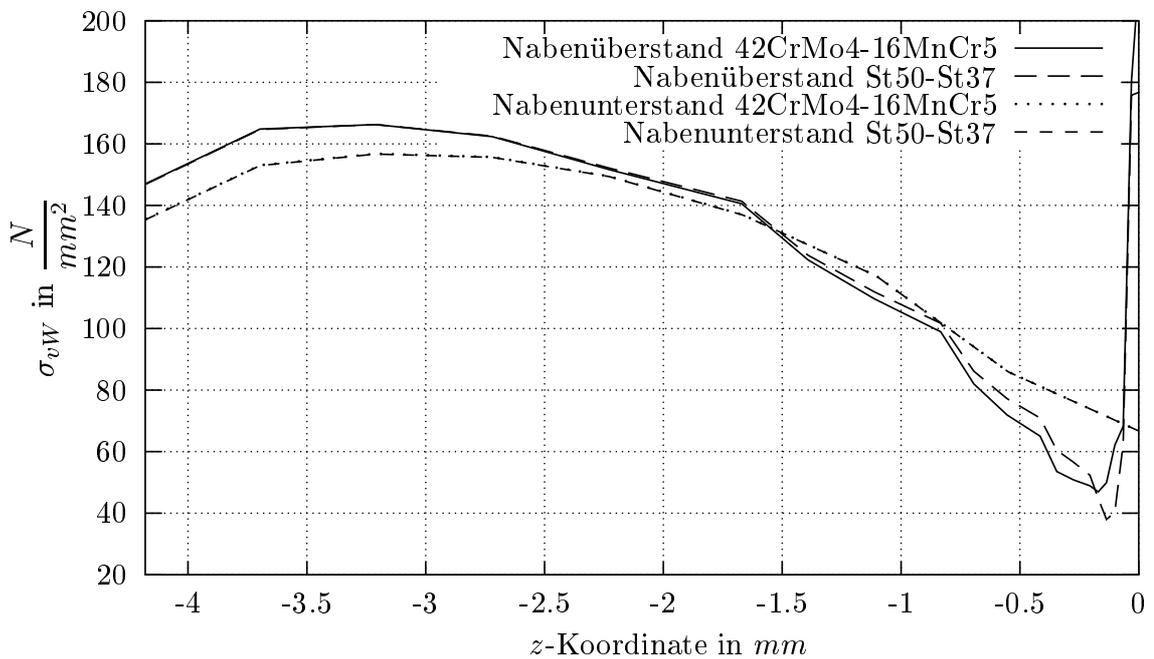


Abb. A.74: Vergleichsspannungen auf der Wellenoberseite des Modelles 3D-quad für Zustand 2 im Bereich des Wellenabsatzes

Liste häufig verwendeter Formelzeichen

Skalare:

a	Nabenlänge
A	Oberfläche
c_1	PRAGER-Konstante
D_{aA}	Aussendurchmesser der Nabe
D_F	Pressfugendurchmesser
D_N	Nabendurchmesser
D_{PA}	Plastizitätsdurchmesser der Nabe
E	Elastizitätsmodul
f	Fließbedingung
F	AIRYSche Spannungsfunktion
F_N	Normalkraft
G	Schubmodul
G'	bezogenes Spannungsgefälle
h	skalare innere Variable
K	Gesamteinflussfaktor
K_v	Verschleißrate
K_1	technologischer Größeneinflussfaktor
K_2	geometrische Größeneinflussfaktor
$K_{F\sigma}$	Einflussfaktor der Oberflächenrauigkeit
K_v	Einflussfaktor der Oberflächenverfestigung
l_F	Fugenlänge
l_g	Schlupftiefe
M_b	Biegemoment
M_r	Rutschmoment
n	Stützziffer
N_{ertr}	Schwingenspielzahl bis zur Reibermüdung
p	Fugendruck
p_P	plastischer Grenzfugendruck
Q_A	Durchmesserverhältnis
q_A	Gesamtquerschnitt
q_{PA}	plastisch beanspruchte Ringfläche
R_{eL}	Grenzfestigkeit des Werkstoffes

R_m	Zugfestigkeit
$R_{p0,2}$	Streckgrenze
R_z	Oberflächenrauigkeit
s	Gleitweg
\hat{s}	Schlupfamplitude
s_g	Grenzschlupfamplitude
s_{zul}	zulässiger Reibschlupf
S_{PI}	Soll-Sicherheit Innenteil
S_{PA}	Soll-Sicherheit Aussenteil
t	Zeit
T	aktuelle Temperatur
T_0	Ausgangstemperatur
U	Übermaß
$U_{s\vartheta}$	Fügespiel
U_w	wirksames Übermaß
W_V	Verschleißvolumen
α	Wärmeausdehnungskoeffizient
β_σ	Kerbwirkungszahl
δ_{ij}	KRONECKER-Symbol
ε_{eq}^{pl}	Äquivalente plastische Deformation
λ	LANGRANGEScher Multiplikator (plastischer Multiplikator)
ν	Querkontraktionszahl
μ	Haftbeiwert
σ_b	Biegespannung
σ_{ba}	Biegespannungsamplitude
σ_{bm}	Biegemittelspannung
σ_F	Fließspannung
σ_T	Zugspannung an der Oberfläche
σ_{zdW}	Zug-Druckwechselfestigkeit
σ_{mv}	Vergleichsmittelspannung
σ_{bWK}	Biegewechselfestigkeit des gekerbten Bauteils
σ_{bADK}	Biegespannungsamplitude der Bauteilfestigkeit
σ_{bW}	Biegewechselfestigkeit
σ_{bW}	Biegewechselfestigkeit
τ	Reibschubspannung

$\psi_{b\sigma K}$	Mittelspannungsempfindlichkeit
ϱ	Dichte
ϑ	Temperatur
ϑ_R	Raumtemperatur
ϑ_I	Fügetemperatur des Innenteils
ϑ_{Aerf}	erforderliche Fügetemperatur des Aussenteils
ξ_w	bezogenes wirksames Übermaß
ζ_{zul}	zulässiger bezogener Plastizitätswert

Matrizen und Tensoren:

A	Tensorfeld
B	Tensorfeld
$\overset{e}{B}$	Matrix der nach den Ortskoordinaten abgeleiteten Elementformfunktionen
C	Rechts-CAUCHY-GREEN-Tensor
D	Differentialmatrix
$\underset{4}{D}$	Hyperelastische Materialmatrix
E	Elastizitätstensor
f	Volumenkräfte
$\overset{e}{f}$	Elementvolumenkräfte
$\overset{e}{G}(x)$	Matrix der Elementformfunktionen
G_I, G^I	Ko- und kontravariante Basisvektoren der Ausgangskonfiguration
h	Tensorielle innere Variable beliebiger Stufe
I	Zweistufiger Einheitstensor
\mathcal{K}	Vektor der Volumenkräfte
$\overset{e}{K}$	Elementsteifigkeitsmatrix
n	Normalenvektor
p	Spannungsvektor
$\overset{e}{p}$	Elementspannungsvektor
T	2. PIOLA-KIRCHHOFFscher Spannungstensor
t	Spannungsvektor
u	Verschiebungsvektor

$\overset{e}{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$	Verschiebungsfeld eines Elementes
$\overset{e}{\mathbf{u}}$	Verschiebungskomponenten eines Elementes
\mathbf{X}	LANGRANGESche Koordinate
\mathbf{x}	EULERSche Koordinate
$\boldsymbol{\alpha}$	Wärmeausdehnungstensor
$\boldsymbol{\beta}$	materialbezogener Tensor
$\boldsymbol{\varepsilon}$	linearer Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\sigma}$	CAUCHYScher Spannungstensor

Operatoren und sonstige Symbole:

\cup	Vereinigung
\otimes	Tensorprodukt
\cdot	Skalarprodukt
$()^T$	Transponierter Tensor
$()^{-1}$	Inverser Tensor
$()^\sigma$	Elastischer Anteil einer Variable
$()_p$	Plastischer Anteil einer Variable
$()_{eP}$	Elastisch-plastischer Anteil einer Variable
$()^\vartheta$	Temperatur-Anteil einer Variable
$()_r$	radialer Anteil einer Variable
$()_\varphi$	Umfangs-Anteil einer Variable
$()_z$	axialer Anteil einer Variable
$()_A$	Wert einer Variable für das Aussenteil
$()_I$	Wert einer Variable für das Innenteil
∇	Nabla-Operator
Δ	Laplace-Operator
$d()$	Vollständiges Differential
$\dot{()}$	Materielle Zeitableitung
$\partial()/\partial()$	Partielle Ableitung
$Sp()$	Spur eines Tensors
\forall	für alle

Literaturverzeichnis

- [1] Apel, Th.; Milde, F.: *Realization and comparison of various mesh refinement strategies near edges*. TU Chemnitz, SFB 393, 1998
- [2] Apel, Th.; Mücke, R.; Whiteman, J.R.: *An adaptive finite element technique with a-priori mesh grading*. BICOM, Institute of Computational Mathematics, Brunel, University of West London, 1993
- [3] Babuška, I.; Rheinboldt, W.C.: *On the reliability and optimality of the finite element method*. Comput. Struct. Vol.10, 1979, S.87-94
- [4] Babuška, I.; Kellogg, R.B.; Pitkäranta, J.: *Direct and inverse error estimates for finite elements with mesh refinements*. Numer. Math. Vol.33, 1979, S.447-471
- [5] Babuška, I.; Miller, A.: *A-posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method*. Institute for Physical Science and Technology, Techn. Note BN-968, 1981
- [6] Beitz, W.; Küttner, K.-H. *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag, 17. Auflage, 1990, S.E84-E86
- [7] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 25. Auflage, 1991 + Ergänzungsband, 5. Auflage
- [8] Czichos, H.; Habig, K.-H.: *Tribologie-Handbuch: Reibung und Verschleiß*. Vieweg Verlag, 1992
- [9] Hobst, E.: *Methode der finiten elemente im Stahlbetonbau. Randbedingungen und Singularitäten - wie genau ist die Finite-Elemente-Methode?* Beton- und Stahlbetonbau 95(2000), Heft 10, Ernst und Sohn, Berlin, 2000, S.572-583
- [10] Deutsches Institut für Normung e.V.: *DIN 743:1997 Tragfähigkeit von Wellen und Achsen*. 1997
- [11] Deutsches Institut für Normung e.V.: *DIN 7190:2001-02 Pressverbände Berechnungsgrundlagen und Gestaltungsregeln*. Beuth Verlag GmbH Berlin, 2001
- [12] Deutsches Institut für Normung e.V.: *DIN EN ISO 80441:1999-11 Korrosion von Metallen und Legierungen-Grundbegriffe und Definitionen*.

- [13] Doege, E.; Meyer-Nolkemper, H.; Saeed, I.: *Fließkurvenatlas metallischer Werkstoffe*. Hanser Verlag, 1986
- [14] Funk, W.: *Der Einfluss der Reibkorrosion auf die Dauerhaltbarkeit zusammengesetzter Maschinenelemente*. Dissertation, TH Darmstadt, 1968
- [15] Göldner, H.: *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre Band 1*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1. Auflage, 1979
- [16] Göldner, H.: *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre Band 2*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1. Auflage, 1985
- [17] Gropp, H.: *Die Übertragungsfähigkeit von Längsverbindungen bei dynamischer Belastung durch wechselnde Drehmomente*. Diss., TH Karl-Marx-Stadt, 1975
- [18] Gropp, H.: *Das Übertragungsverhalten dynamisch belasteter Pressverbindungen und die Entwicklung einer neuen Generation von Pressverbindungen*. Habilitationsschrift, TU Chemnitz, 1997
- [19] Gropp, H.; Saed, A.; Möckel, J.: *Experimentelle Untersuchungen zur Bestimmung der Gleitzonenlängen sowie des Übertragungsverhaltens von Pressverbindungen bei kombinierter dynamischer Belastung durch Biegemomente, Drehmomente und Querkräfte*. DFG-Abschlussbericht, TU-Chemnitz, 2000
- [20] Gropp, H.; Wächter, K.: *Übertragungsverhalten biegebelasteter Pressverbindungen auf Wellenabsätzen bei Nabenüberstand und Nabenunterstand*., Forschungsbericht 2003
- [21] VDI-Gesellschaft: *VDI-Berichte 1790 - Welle-Nabe-Verbindungen*., Tagung Wiesloch, 2003
- [22] Häusler, N.: *Der Mechanismus der Biegemomentübertragung in Schrumpfvverbindungen*. Dissertation, TH Darmstadt, 1974
- [23] Klein, B.: *FEM - Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode*. Vieweg-Verlag, 2. Auflage, 1997
- [24] Kollmann, F.G.: *Die Auslegung elastisch-plastisch beanspruchter Pressverbände*. Forschung Ingenieurwesen 28, 1978, H.1, S.1-11
- [25] Kollmann, F.G.; Önöz, E.: *Ein verbessertes Auslegungsverfahren für elastisch-plastisch beanspruchte Querpressverbände*. Konstruktion 35, 1983, H.11, S.439-444
- [26] Kollmann, F.G.: *Welle-Nabe-Verbindungen*. Konstruktionsbücher Band 32, Springer-Verlag, 1984
- [27] Kreißig, R.; Benedix, U.: *Höhere Technische Mechanik - Lehr- und Übungsbuch*. Springer-Verlag, 2002

- [28] Kreißig, R.: *Einführung in die Plastizitätstheorie*. Fachbuchverlag GmbH Leipzig, 1992
- [29] Leidich, E.: *Beanspruchung von Pressverbindungen im elastischen Bereich und Auslegung gegen Dauerbruch*. Dissertation TH Darmstadt, 1983
- [30] Leidich, E.: *Zylinderpressverband - Berechnung der Pressungsverteilung im zylindrischen Pressverband bei äußerer Belastung*. FVA Abschlussbericht, Heft 161, 1984
- [31] Lundberg, G.: *Die Festigkeit von Presssitzen*. Das Kugellager 19, 1944, H.1/2, S.1-11
- [32] Meinken, A.: *Finite Elemente in der Praxis*. Expert Verlag, 2001 S.45
- [33] v. Mises, R.: *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*. in: Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, math. phys. Kl., Göttingen, 1913, S.582-592
- [34] MSC.Software Corporation: *MARC/MENTAT*, Version 2001, 2001
- [35] MSC.Software Corporation: *MSC.Marc Volume A: Theory and User Information*. Version 2001, 2001
- [36] Mücke, R., Altenbach, J.: *A-priori Aussagen zur Qualitätssteuerung von Finite-Element-Berechnungen in der Elastizitätstheorie.*, Akademie Verlag, ZAMM 73(1993) 7/8, 1993, S.T915-T918
- [37] Mußchelischwili, N.I.: *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1. Auflage, 1971
- [38] Neuber, H.: *Kerbspannungslehre*. Springer-Verlag, 3. Auflage, 1985, S.7-13, 103-105
- [39] Oganessian, L.A.; Rukhovets, L.A.; Rivkind, V.Ja.: *Variational-difference methods for solving elliptic equations, Part II.*, Differential equations and their applications Vol.8, Izd. Akad. Nauk Lit. SSR, 1974, (in Russisch)
- [40] Paysan, G.: *Ein Wirkungskonzept zur Simulation des Verschleiß- und Tragverhaltens reibkorrosionsgefährdeter Maschinenelemente*. Diss., TU Berlin, 2000
- [41] MSC.Software Corporation: *MSC.MARC 2001 PYTHON.*, Version 2001, 2001
- [42] Raugel, G.: *Résolution numérique de problèmes elliptiques dans des domaines avec coins.*, Dissertation, Université de Rennes (France), 1978
- [43] Raugel, G.: *Résolution numérique par une méthode d'éléments finis du problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un polygone.*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A Vol.286 Nr.18, 1978, S.A791-A794

- [44] Ruiz, C.; Chen, K.C.: *Life assessment of dovetail joints between blades and discs in aero-engines*. In: Proc. Conf. Fatigue of Engineering Materials and Structures. Institute of Mechanical Engineers, London, 1986, S.187-194
- [45] Ruiz, C.; Wang, Z.P.; Webb, P.: *Techniques for Characterization of Fretting Fatigue Damage*. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1992, S.170-177
- [46] Schmid, E.: *Theoretische und experimentelle Untersuchung des Mechanismus der Drehmomentübertragung von Kegelpressverbindungen*. VDI-Z, Reihe 1, Nr.16, VDI-Verlag, 1969
- [47] Smetana, T.: *Untersuchungen zum Übertragungsverhalten biegebelasteter Kegelpress- und Zylinderpressverbindungen*. Shaker Verlag, Diss., TU Chemnitz, 2001
- [48] Sokolowskij, V.V.: *Theorie der Plastizität.*, VEB Verlag Technik Berlin, 1955
- [49] Steven, G.P.: *The shrink fit problem with both components being elastic*. Int. J. Eng. Sci. 13, 1975, S.663-673
- [50] Vingsbo, O.; Söderberg, S.: *On fretting Maps*. Wear 126, 1988, S.131-147
- [51] Wriggers, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, 2001
- [52] Ziaei, M.: *Analytische Untersuchung unrunder Profilmfamilien und numerische Optimierung genormter Polygonprofile für Welle-Nabe-Verbindungen*. Dissertation, TU-Chemnitz, 2002
- [53] Zienkewitz, O.C.: *Methode der finiten Elemente*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1987

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus Quellen entnommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Chemnitz, 25.02.2004

Dirk Schellenberg